

Digitale regelsystemen

Regeltechnische monografieën

Regeltechnische monografieën

Onder redactie van :

Prof. ir. H.R. van Nauta Lemke

Ir. H. Feikema

Ir. G. Honderd

Ir. M. Pleeging

Ir. H.B. Verbruggen

Deel 4

Digitale regelsystemen

Ir. H.B. Verbruggen

*Vakgroep regeltechniek,
afdeling der electrotechniek,
Technische Hogeschool Delft*

1974 by Nijgh-Wolters-Noordhoff Universitaire Uitgevers B.V., Rotterdam

ISBN 90 298 1204 4

Voorwoord

Door verschillende omstandigheden is de uitgave van dit deel 4 in de reeks „Regeltechnische Monografieën” later gerealiseerd dan volgens het oorspronkelijke tijdschema was aangegeven. Dit had o.a. tot gevolg dat enkele onderwerpen die oorspronkelijk in afzonderlijke monografieën behandeld zouden worden, in dit deel zijn opgenomen, zoals de onderwerpen die in de hoofdstukken II, XII en XIII ter sprake komen. De auteurs menen dat voor het Nederlandse taalgebied een dergelijk algemeen studieboek van waarde is, vooral nu er bij het toepassen van digitale rekenmachines voor het regelen van processen van zeer verschillende gearardheid meer ervaring beschikbaar is.

Prof. ir. H. R. van Nauta Lemke introduceerde reeds in 1963 een college aan de Afdeling der Elektrotechniek van de Technische Hogeschool te Delft op het gebied van systemen met signaalbemonstering en digitale regelsystemen. Hij gaf hiermee de stimulans om op dit gebied van de regeltechniek verder onderwijs en onderzoek te verrichten. Dit heeft er tevens toe geleid dat door de Vakgroep Regeltechniek in 1968 en in 1972 postdoctorale cursussen zijn verzorgd op dit gebied.

Naast een overzicht van hetgeen in de literatuur en op symposia over het onderwerp: digitale regelsystemen is gemeld, zijn tevens enige resultaten van het onderzoek op dit gebied binnen de Vakgroep Regeltechniek, in deze monografie opgenomen. Hoewel de genoemde auteurs voor de gehele reeks verantwoordelijk zijn, is de tekst van deze uitgave vrijwel geheel door ir. H. B. Verbruggen opgesteld.

Voor de hulp die bij het bespreken, uitwerken van voorbeelden en corrigeren zijn geboden, danken wij met name ir. J. van Amerongen, ir. P. M. Bruijn en ir. H.W. Klessler. Tevens danken wij de heren G. van Berkel en W. Th. J. van Kan van de Tekenkamer van de Afdeling der Elektrotechniek voor de zorg aan de tekeningen besteed, alsmede de firma Ceuterick voor het uitstekende zetwerk.

De uitgave van deze monografie is bovendien mogelijk geworden door de inbreng van mevrouw H. Wagener-Talsma, die het typewerk heeft verzorgd.

De redactie

Inhoud

<i>Voorwoord</i>	v
I. <i>Systemen met signaalbemonstering</i>	1
1.1 Inleiding	1
1.2 Systemen met inherente signaalbemonstering	8
1.3 Opzettelijk bemonsterde systemen	12
II. <i>De digitale rekenmachine in de regeltechniek</i>	18
2.1 Inleiding	18
2.2 De digitale rekenmachine bij de analyse en synthese van regelsystemen	20
2.3 De toepassing van de digitale rekenmachine als deel van één of meer regelsystemen	23
2.4 De rekenmachine toegepast in geregelde processen	30
2.5 De in- en uitvoer van procesgegevens in de rekenmachine	32
III. <i>Bemonstering en rekonstruktie van signalen</i>	37
3.1 Verschillen tussen systemen met signaalbemonstering en continue systemen	37
3.2 Het bemonsteringsproces	39
3.3 Rekonstruktie van signalen	53
IV. <i>Diskrete elementen</i>	65
4.1 Differentievergelijkingen	65
V. <i>De z-transformatie</i>	77
5.1 Definitie van de z-transformatie en de inverse z-transformatie	77
5.2 Eigenschappen van de z-transformatie	83
5.3 Bepaling van de z-transformatie en de inverse z-transformatie	89
5.4 De gemodificeerde z-transformatie en de meervoudige bemonsteringsmethode	92

VI.	<i>Blokschema's van systemen met signaalbemonstering en digitale systemen</i>	103
6.1	Inleiding	103
6.2	Overdrachtsfunctie diskrete elementen	104
6.3	Overdrachtsfunctie bemonsterde systemen	106
6.4	Invoeren van beginvoorwaarden	107
6.5	Voorbeelden van blokschema's	109
6.6	Bepaling van de overdrachtsfunctie van systemen indien de gemodificeerde z -transformatie wordt gebruikt	113
6.7	Bepaling van de overdrachtsfunctie van systemen met dode tijd	115
VII.	<i>Stabiliteit</i>	117
7.1	Inleiding	117
7.2	Direkte methoden ter bepaling van de stabiliteit	119
7.3	Verborgen oscillaties en verborgen instabiliteit	126
VIII.	<i>Analyse in het frekwentiedomein</i>	129
8.1	Inleiding	129
8.2	Benaderingsmethoden	130
8.3	Exakte bepaling van de frekwentiekarakteristieken	133
IX.	<i>Analyse met behulp van de polen- en nulpuntenmethode</i>	141
9.1	Inleiding	141
9.2	Frekwentiekarakteristieken uit polen en nulpunten	142
9.3	Overgangsverschijnselen uit het polen- en nulpuntenbeeld	145
9.4	Poolbaanmethode	150
9.5	Effect van de polenconfiguratie in het z -vlak op het overgangsverschijnsel	154
9.6	Enige algemene opmerkingen over polen- en nulpuntenconfiguraties in het z -vlak	157
X.	<i>Ontwerpen van regelsystemen met signaalbemonstering en digitale regelsystemen</i>	163
10.1	Inleiding	163
10.2	Statische foutcoëfficiënten	165
10.3	Ontwerpkriteria voor het dynamische gedrag van een systeem	168
10.4	Kompensatie met continue netwerken en regelaars	179
10.5	Kompensatie met digitale netwerken	184
10.6	D.D.C. Regelalgorithmen	190
10.7	Keuze van de bemonsteringsperiode T	199
10.8	Instelregels	201

10.9	Kwantiseringseffecten	203
10.10	Systemen met verschillende bemonsteringsfrequenties en asynchrone bemonstering	204
XI.	<i>Digitale filters en compensatienetwerken</i>	209
11.1	Inleiding	209
11.2	Realisatieschema's	210
11.3	Uitfilteren van storingen	217
XII.	<i>Toestandsbeschrijving van regelsystemen</i>	229
12.1	Inleiding	229
12.2	Beschrijving van continue systemen in toestandsvergelijkingen	231
12.3	Oplossing van de continue toestandsvergelijkingen	236
12.4	Beschrijving van diskrete elementen in toestandsvergelijkingen	238
12.5	Beschrijving van continue elementen voorafgegaan door een nulde orde houdschakeling in toestandsvergelijkingen	242
12.6	Oplosmethoden voor $(e^{AT})^N$ en A^N	244
12.7	De overdrachtsfunctie en de overdrachtmatrix van bemonsterde en digitale systemen	245
12.8	Gekombineerde systemen	246
12.9	Enige veel voorkomende mogelijkheden van toestandsbeschrijving	250
12.10	Regelbaarheid en waarneembaarheid	255
XIII.	<i>Tijdoptimale digitale regelsystemen</i>	260
13.1	Inleiding	260
13.2	Minimum settling time control (M.S.T.C.)	261
13.3	Ripple free response control (R.F.R.C)	272
13.4	Methode van toestandsterugkoppeling	280
	<i>Appendix A. Bewijs van de inverse z-transformatie en bewijzen van een aantal eigenschappen van de z-transformatie</i>	287
1.	Bewijs inverse z-transformatie	287
2.	Bewijs van de reële verschuivingstheorema's	288
3.	Bewijs van het complexe verschuivingstheorema	289
4.	Bewijs van de sommatieregel	289
5.	Bewijs van de vermenigvuldigingsregel met $a^{\pm n}$	289
6.	Bewijs van de schaaleigenschap	290
7.	Bewijs van de vermenigvuldigingsregel met $t^{\pm m}$	290
8.	Bewijs van de limietwaardentheorema's	290
9.	Bewijs van de konvolutie-eigenschappen	291
10.	Bewijs van het theorema van parseval	292

<i>Appendix B. Oplossing van de matrixfuncties e^{AT} en A^N</i>	293
1. Oplosmethoden voor e^{AT}	293
2. Oplosmethoden voor $(e^{AT})^N$ en $(A)^N$	298
 <i>Literatuur</i>	 303
 <i>Register</i>	 307

I. Systemen met signaalbemonstering

1.1 INLEIDING

In de voorgaande monografieën worden continue regelsystemen behandeld. Zij worden beschreven door differentiaalvergelijkingen die op elk moment de in het systeem voorkomende signalen beschrijven.

In de diverse elementen waaruit het regelsysteem is opgebouwd vindt de signaalverwerking continu plaats. De meeste elementen in fysische systemen voldoen aan deze beschrijvingswijze.

In deze monografie zullen regelsystemen beschreven worden waarin één of meer signalen slechts op diskrete tijdstippen informatie overdragen. Deze wijze van signaaloverdracht vindt vaak plaats wanneer de regelkring door een menselijk ingrijpen wordt gesloten. Op diskrete tijdstippen wordt informatie verzameld en op diskrete tijdstippen vindt een ingreep plaats naar aanleiding van de verkregen en verwerkte informatie.

Bovendien worden soms meetinstrumenten gebruikt die diskontinu informatie over de te meten en te regelen grootte geven, soms is deze informatie gedigitaliseerd. Het regelen van gekompliceerde processen heeft de toepassing van digitale rekenmachines in regelsystemen sterk doen toenemen. Voor de vele automatiserings- en regeltaken worden dan één of meer rekenmachines ingezet.

In de regelsystemen is dan een element (digitale rekenmachine) aanwezig dat op diskrete tijdstippen aangeboden informatie digitaal verwerkt en de bewerkte informatie slechts op diskrete tijdstippen aan de rest van het systeem doorgeeft.

Met vrucht kunnen de in deze monografie behandelde methoden ook worden toegepast buiten de techniek in bijvoorbeeld economische systemen en productie processen. Hierin worden beslissingen op diskrete tijdstippen genomen, naar aanleiding van feitenmateriaal dat op diskrete tijdstippen ter beschikking komt.

Indien het tijdsinterval tussen de op diskrete tijdstippen aangeboden informatie klein is t.o.v. de overheersende tijdkonstanten van het systeem zelf, is een benadering volgens een continue systeembeschrijving vaak zonder meer mogelijk. Indien de verhouding: tijdsinterval tussen de diskrete tijdstippen en tijdkonstanten van het systeem echter toeneemt dient men over te gaan op de in deze monografie te behandelen beschrijvingswijzen.

Tenslotte zij nog vermeld dat voor de analyse en synthese van continue systemen een diskretisering van het continue systeem nuttig kan zijn in verband met de eenvoudige gegevensverwerking met behulp van digitale rekenmachines (digitale simulatie). In het vervolg van deze monografie zal blijken dat dezelfde analyse- en synthesemethoden die voor continue systemen zijn aangegeven in de voorgaande monografieën (o.a. blok-schema's, overdrachtsfuncties, frekwentieresponsiemethode en polen- en nulpuntenmethode), ook met geringe modifikaties, zijn toe te passen op de in deze monografie te behandelen systemen.

De systemen die in deze monografie behandeld worden, worden systemen met signaalbemonstering genoemd en voldoen aan de volgende definitie: 'Systemen met signaalbemonstering zijn systemen waarin een signaal (signalen) op één of meer plaatsen in het systeem op diskrete tijdstippen voorhanden is (zijn) of bemonsterd wordt (worden)'. Bovendien kunnen er elementen in het systeem voorkomen die de informatie slechts op diskrete tijdstippen verwerken. De Engelse, Duitse en Franse benamingen van deze systemen luiden resp.: 'sampled data' of 'discrete data systems', 'Abtast-systeme' en 'Systèmes échantillonnés'.

Systemen met signaalbemonstering worden wel intermitterende systemen genoemd, omdat de signalen intermitterend worden doorgegeven.

Het gedrag van deze systemen wordt bepaald door de dynamische en statische eigenschappen van de elementen in het systeem en de wijze van signaalbemonstering en verwerking van de aldus verkregen informatie.

In deze monografie zal voornamelijk aandacht worden besteed aan het eenvoudigste geval waarin de bemonstering met gelijke tussenpozen geschiedt. Tussen de tijdstippen van bemonstering wordt geen informatie over de momentele waarde van het signaal doorgegeven.

In deze systemen wordt van het continue signaal (fig. 1.1) slechts informatie over de grootte van het signaal verkregen op de tijdstippen $0, T, 2T, \dots, nT$ ($n > 0$ en geheel).

Dit is aangegeven in fig. 1.1.

T = bemonsteringstijd of -periode

$f_s = \frac{1}{T}$ = bemonsteringsfrequentie

$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ = hoekfrequentie van de bemonstering.

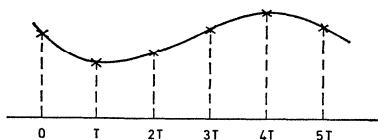


Fig. 1.1

Elementen waaraan informatie op diskrete tijdstippen wordt aangeboden en die zelf informatie op diskrete tijdstippen afgeven en verwerken, worden diskrete elementen genoemd. Zij worden beschreven door differentievergelijkingen. Indien deze informatie bovendien digitaal wordt aangeboden en verwerkt spreekt men van digitale elementen. Indien een dergelijk element in het regelsysteem is opgenomen spreekt men van digitale regelsystemen.

In deze monografie zal voornamelijk aandacht aan deze groep van systemen worden besteed.

Bij digitale systemen wordt naast de signaalbemonstering op diskrete tijdstippen, ook een signaalkwantisering (diskretisering in de amplitude) toegepast, d.w.z. dat slechts een eindig aantal diskrete niveaus in de grootte van het signaal onderscheiden wordt. (fig. 1.2a). Het gediskretiseerde signaal wordt door een getal weergegeven en gekodeerd in een digitale kode (binaire, spiegelbeeld binaire of gray kode, binair gekodeerd decimale kode, enz.).

Dit is het geval indien een digitale rekenmachine als diskreet element in het systeem wordt opgenomen. De kwantisering geschiedt met een analoog-digitaal omzetter, terwijl het digitale signaal met behulp van een digitaal-analoog omzetter weer continu wordt gemaakt.

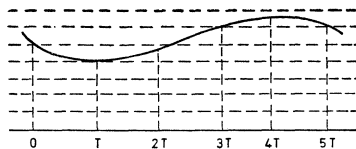


Fig. 1.2a

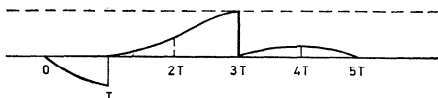


Fig. 1.2b

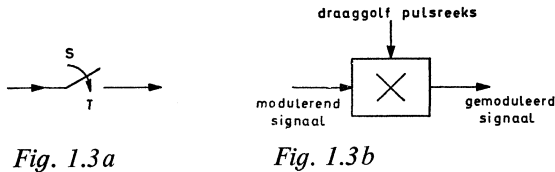
Door de kwantisering wordt kwantiseringsruis, dit is het verschil tussen de werkelijke grootte van het signaal en de gekwantiseerde grootte, in het systeem geïntroduceerd (fig. 1.2b).

De diskretisering in de tijd beïnvloedt voornamelijk het dynamische gedrag van de regelkring, terwijl de diskretisering in de amplitude voornamelijk de nauwkeurigheid van de te regelen grootte zal beïnvloeden. Indien deze kwantisering zeer grof is zal ook het dynamische gedrag hierdoor beïnvloed worden.

Systemen met signaalbemonstering bestaan voornamelijk uit continue elementen, zodat het gedrag van een dergelijk systeem grotendeels beschreven kan worden met differentiaalvergelijkingen. Het gemengd optreden van

diskrete elementen en continue elementen doet een stelsel van differentiaal- en differentievergelijkingen ontstaan die het totale regelsysteem beschrijven.

Het bemonsteren van signalen geschiedt door een schakelaar (bemonsteraar) (fig. 1.3 a). De informatie over het signaal die op de bemonsterings-tijdstippen verkregen wordt, kan op diverse manieren aan de rest van het systeem worden doorgegeven. In sommige gevallen kan de werking van de schakelaar en de wijze waarop de informatie aan het systeem wordt doorgegeven vergeleken worden met de werkwijze van een modulator (fig. 1.3 b).



Hierbij kan onderscheid gemaakt worden tussen modulatie waarbij een continue signaal (draaggolf) gemoduleerd wordt en modulatie waarbij een diskontinu signaal (pulsreeks) gemoduleerd wordt.

Hierbij is $x(t)$ het modulerende ingangssignaal dat de draaggolf moduleert, het uitgangssignaal van de modulator is de gemoduleerde draaggolf $y(t)$. Het is mogelijk dat de momentane waarde van $x(t)$ de amplitude, fase of frekwentie van de draaggolf moduleert. In al deze gevallen is aan de uitgang continu informatie aanwezig over het signaal $x(t)$.

Indien $x(t)$ de amplitude van de draaggolf moduleert, ontstaat een amplitude gemoduleerd signaal $y(t)$ waarvan de omhullende overeenkomt met het oorspronkelijke signaal $x(t)$. Deze vorm van modulatie wordt amplitude modulatie (A.M.) genoemd en komt ook voor bij regelsystemen. Systemen die werken volgens dit principe heten draaggolfsystemen of wisselstroomsystemen met onderdrukte draaggolf.

Deze systemen werken hoofdzakelijk met een draaggolffrekwentie van 400 hz of 1500 hz. Als slechts gedeeltelijk in het regelsysteem met wisselstroomcomponenten wordt gewerkt dient men een fasegevoelige detectie toe te passen, om naast informatie over de modulus van het modulerende signaal, de informatie over de fase te behouden

In servosystemen worden draaggolfsystemen veel toegepast, omdat zij het

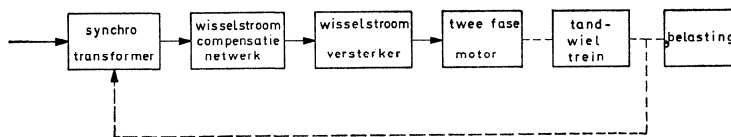


Fig. 1.4

gebruik van bepaalde componenten mogelijk maken met gunstige eigenschappen (synchro's, wisselstroommotoren).

In fig. 1.4 is een draaggolfsysteem weergegeven waarin het informatie-transport met wisselstroomcomponenten plaatsvindt.

In deze monografie zullen systemen die werken met een vorm van draaggolfmodulatie niet ter sprake komen.

Een geheel andere vorm van modulatie maakt gebruik van een pulsreeks, dus een diskontinu signaal, die gemoduleerd wordt. De pulsreeks bestaat uit rechthoekige pulsen van gelijke amplitude en breedte die met gelijke tussenpozen worden aangeboden (zie fig. 1.5).



Fig. 1.5

De pulsreeks wordt gemoduleerd door $x(t)$ die de volgende parameters van de puls kan moduleren: de amplitude, de breedte en het moment waarop de puls verschijnt in het uitgangssignaal $y(t)$.

In al deze gevallen is slechts op bepaalde tijdstippen (bemonsteringstijdstippen) informatie aanwezig over de grootte van het modulerende signaal $x(t)$. Achtereenvolgens zullen enkele pulsmodulaties worden besproken.

Pulsamplitude modulatie (PAM)

Bij PAM wordt de pulstrein in amplitude gemoduleerd door de instantane waarden van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen $t = 0, T, 2T \dots$ (zie fig. 1.6). De hoogte van de pulsen aan de uitgang is recht evenredig met de grootte van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen. Er doen zich hierbij twee mogelijkheden voor:

- De amplitude van de puls volgt gedurende de bemonsteringsduur (breedte van de puls) het signaal $x(t)$ exact.
- De amplitude van de puls verandert tijdens de bemonsteringsduur niet. De amplitude wordt bepaald door de waarde van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen.

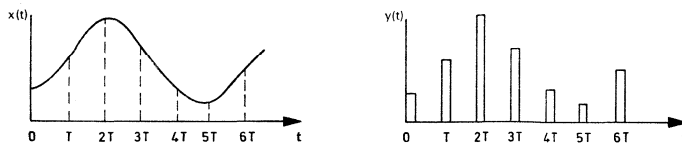


Fig. 1.6

De werking van een schakelaar komt overeen met de hier beschreven wijze van modulatie. Hierop wordt in hoofdstuk III nader ingegaan.

Systemen die volgens dit principe van modulatie werken komen in de regeltechniek veel voor. Tot deze klasse van systemen zal deze monografie zich in hoofdzaak beperken.

Pulsbreedte modulatie (PWM) of pulsduur modulatie (PDM)

Bij pulsbreedte modulatie wordt de breedte van de pulsen (pulsduur) gemoduleerd door de amplitude van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen. De pulsbreedte (pulsduur) van het gemoduleerde signaal $y(t)$ is recht evenredig met de amplitude van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen (fig. 1.7).

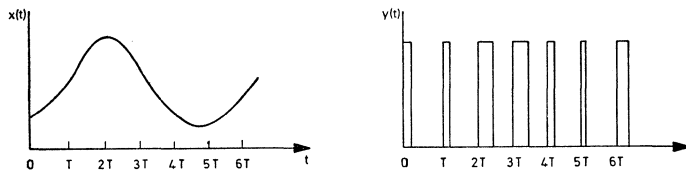


Fig. 1.7

Deze wijze van modulatie komt wel voor bij de besturing van motoren met behulp van SCR (silicon controlled rectifier) elementen. Door een gelijkspanningssignaal te choppen ontstaat dan een soortgelijk signaal als in fig. 1.7, dat wordt toegevoerd aan een gelijkstroommotor. Het is ook mogelijk motoren m.b.v. SCR elementen te sturen door een variabele aansnijding van de wisselstroomvoedingsspanning.

In industriële toepassingen worden wel tijdproportionele regelaars gebruikt. Ook deze regelaars werken volgens het principe van de pulsbreedte modulatie. De uitgang van deze regelaar heeft een aan/uit karakter. De grootte van het ingangssignaal bepaalt de verhouding tussen de tijd van het aan/uit signaal bij gelijkblijvende periode. Er ontstaat een niet-lineair regelsysteem.

In deze monografie zal op deze vorm van modulatie niet verder worden ingegaan.

Pulsplaats modulatie (PPM) of pulstijdstip modulatie (PTM)

Bij pulsplaat modulatie bepaalt de amplitude van $x(t)$ het tijdstip waarop de puls aan de uitgang van de modulator verschijnt. De tijdvertraging van de uitgangspuls t.o.v. de ingangspuls is rechtevenredig met de amplitude van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen (fig. 1.8). De afstandsmeting in radar- en sonarsystemen kan men als een vorm van deze modulatie zien. De tijd waarop de echo terugkomt is een maat voor de te meten afstand.

Pulsfrekwentie modulatie (PFM)

Het is ook mogelijk de frekwentie van de pulsreeks te variëren afhankelijk van de grootte van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen.

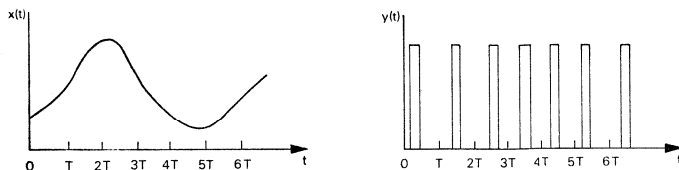


Fig. 1.8

Het aantal pulsen tussen twee bemonsteringstijdstippen aan de uitgang van de modulator wordt bepaald door de amplitude van hetingangssignaal op de bemonsteringstijdstippen (fig. 1.9).

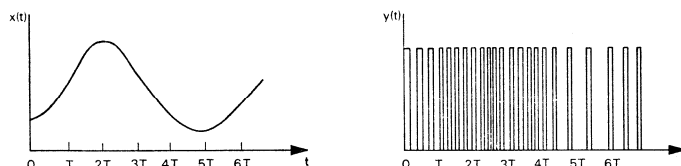


Fig. 1.9

Bij snelheidsservosystemen waarbij de snelheid van de motor gemeten wordt met een incrementele kodeschijf, (zie paragraaf 1.3) is gedurende een bepaald tijdinterval de snelheid recht evenredig met het aantal door de pulsschijf afgegeven pulsjes. Het tijdinterval waarover gemeten wordt bepaalt de 'draaggolfpulsreeks'.

Pulscode modulatie (PCM)

Bij pulscode modulatie treedt behalve een bemonstering van het signaal $x(t)$ ook een kwantisering van de amplitude van het signaal op. Hierbij treedt dus een diskretisering in de tijd en in de amplitude van $x(t)$ op (fig. 1.10). De grootte van het signaal kan nu binair gekodeerd worden en in een register worden opgeslagen.

De transmissie van het binair gekodeerde signaal is zeer eenvoudig. De omzetting van $x(t)$ in een gekwantiseerde en gekodeerde grootheid vindt

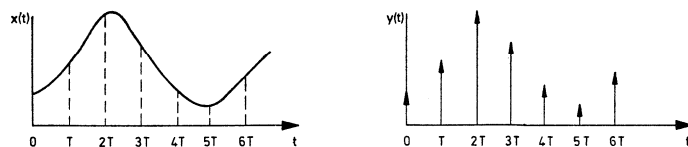


Fig. 1.10

plaats met behulp van een analoog-digitaal omzetter. De waarde van $x(t)$ op de monsteringstijdstippen is als een getal voorhanden, en kan eenvoudig in digitale apparatuur bewerkt worden.

Deze vorm van modulatie komt voor bij digitale regelsystemen, en zal in deze monografie als een bijzonder geval van PAM worden beschouwd.

Delta modulatie (DM)

Een bijzondere vorm van PCM is de delta-modulatie. In PCM systemen wordt het signaal op de bemonsteringstijdstippen gekarakteriseerd door n bits, in DM systemen slechts door 1 bit. Dit bit geeft informatie over de afgeleide van het signaal $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen. Het principe laat zich het eenvoudigst illustreren aan de hand van fig. 1.11.

Het signaal $\varepsilon(t)$ wordt bemonsterd op de bemonsteringstijdstippen $t = 0, T, 2T, \dots$

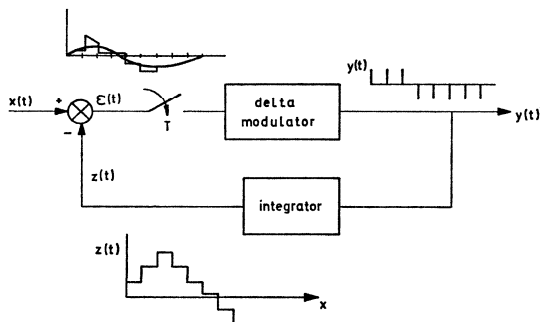


Fig. 1.11

Indien $\varepsilon(t)$ positief is wordt een positieve eenheidspuls afgegeven en indien $\varepsilon(t)$ negatief is wordt een negatieve eenheidspuls afgegeven. In een integrator worden deze pulsen geïntegreerd en ontstaat aan de uitgang een signaal $z(t)$ dat het karakter van een stapjeskromme heeft. Het verschil van $x(t)$ en $z(t)$ wordt aan de integrator toegevoerd, enz. De modulatie op zich bestaat dus uit een teruggekoppeld systeem, waarvan de nauwkeurigheid afhangt van de variaties in $x(t)$.

De transmissie van het signaal $y(t)$ is zeer eenvoudig en het signaal $z(t)$ dat een afspiegeling is van $x(t)$ kan aan de ontvangtzijde eenvoudig verkregen worden door het ontvangen signaal toe te voeren aan een integrator.

1.2. SYSTEMEN MET INHERENTE SIGNAALBEMONSTERING

Bij sommige systemen is de informatie slechts op diskrete tijdstippen beschikbaar, zoals bij: digitale rekenmachines, radar- en sonarinstallaties,

analyse van chemische samenstellingen en bij economische en productie processen. Hier volgen een aantal voorbeelden:

1. Bij een digitale rekenmachine is het eindresultaat van een berekening na een bepaalde rekestijd, die afhankelijk is van het aantal bewerkingen, beschikbaar. Tussenuitkomsten die gedurende deze rekestijd geproduceerd worden zijn soms opeenvolgende benaderingen van het eindresultaat. Binnen zekere grenzen is de rekestijd onafhankelijk van de nauwkeurigheid (het aantal bits) waarmee gewerkt wordt.

2. Bij een 'zoekradar' systeem draait de antenne met een konstante snelheid rond. Een waarneming van het doel vindt gedurende korte tijd van elke omwenteling plaats, nl. als het doel binnen de stralingsbundel van de radar-antenne komt. Gedurende de rest van de omwenteling komt geen informatie over het doel meer beschikbaar. Als de azimuth (bakshoek) veranderingen niet groot zijn, vinden opeenvolgende metingen op regelmatige tijdstippen plaats.

3. Bij sonarsystemen geschiedt de meting eveneens diskontinu (fig. 1.12a). De voortplantingssnelheid van geluid in zeewater is, afhankelijk van temperatuur, druk en zoutgehalte, ongeveer 1500 m/sek. Als het doel zich binnen de stralingsbundel van de sonartransducer bevindt op een afstand van bv. 1200 meter en het afstandsgebied van de transducer is ingesteld op 2000 meter, duurt het $\frac{2400}{1500} = 1,6$ seconden voor de echo van het doel terug is.

De bemonsteringstijd bedraagt echter $\frac{4000}{1500} = 2,67$ seconden (zie fig. 1.12b).

Behalve de echo van het doel worden ook nog storende echo's van de zeebodem, het wateroppervlak en plantaardig en dierlijk leven in het zeewater zelf ontvangen. Bovendien treedt ruis op tengevolge van het eigen

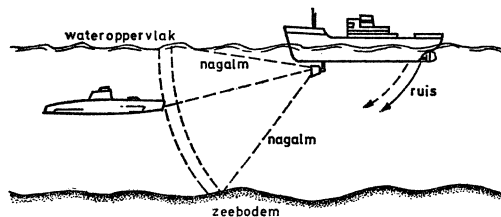


Fig. 1.12a

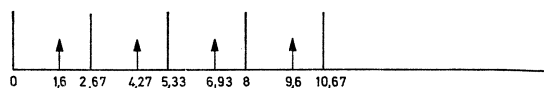


Fig. 1.12b

schip (machinegeluiden, schroefgeluiden) en tengevolge van de waterstroming [1.1].

4. Bij economische systemen en productie processen is sprake van een signaalbemonstering, omdat periodiek gegevens verkregen of doorgegeven worden.

Op diskrete tijdstippen (elk uur, elke dag, elke week, enz.) komen gegevens over productie, de voorraad, het orderbestand, enz. ter beschikking, terwijl ook op diskrete tijdstippen beleidsbeslissingen worden genomen. In fig. 1.13 is een eenvoudig voorraadsysteem weergegeven.

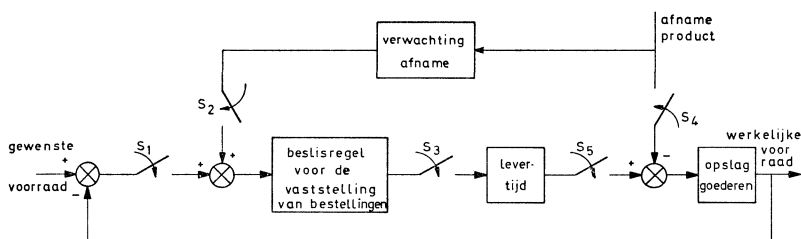


Fig. 1.13

Stel men wil de voorraad van een bepaald produkt zoveel mogelijk gelijk houden aan een gewenste voorraad. Hiertoe wordt het verschil tussen de gewenste en werkelijke voorraad op gezette tijden b.v. elke dag bepaald, aangegeven met schakelaars S_1 . Door de verkoopafdeling wordt de verwachting bepaald van de afname van het produkt en de cijfers die hierdoor periodiek b.v. wekelijks beschikbaar komen (weergegeven door schakelaar S_2) worden doorgegeven aan het bureau dat de bestelorders plaatst.

Dit bureau stelt m.b.v. een beslisregel uit de informatie over de afwijking van de gewenste voorraad en verwachting van de afname, de hoogte van de bestelorder vast. Deze bestelorder wordt periodiek geplaatst (aangegeven met schakelaar S_3). Na een zekere levertijd komen bestellingen binnen op gezette tijdstippen (aangegeven met schakelaar S_5). De bestellingen worden aan de voorraad toegevoegd, maar tevens worden uit deze voorraad periodiek produkten afgenomen (aangegeven met schakelaar S_4).

Er is dus sprake van een regelsysteem waarin periodiek informatie over bepaalde grootheden aanwezig is (telkens wanneer door een menselijk handelen gegevens worden verkregen). Gegevens kunnen ook op willekeurige tijdstippen verkregen worden, maar dit zal i.h.a. minder voorkomen omdat hierop moeilijk een efficiënte op elkaar afgestemde bedrijfsvoering mogelijk is.

Een ander voorbeeld is het stabiliseren van de nationale economie door maatregelen van de overheid [1.2].

Het personeelsbestand en het daaraan gekoppelde beleid kan eveneens beschreven worden door een bemonsterd regelsysteem [1.3].

Het model van het personeelsbestand kan als volgt worden beschreven: Het beleid is gebaseerd op het aantal vacatures, en de personeelsplaatsen die vrij komen door pensionering, sterfte of vertrek. In vele gevallen kan men stellen dat de gegevens eenmaal per maand beschikbaar zijn. Dit stemt redelijk overeen met de aanvang van een dienstverband en de opzegging van een dienstverband (op de eerste van de maand). In het beleid dat er op gericht kan zijn het aantal vacatures zo laag mogelijk te houden kan reeds in een vroegtijdig stadium rekening worden gehouden met:

- het vertrek van personen in de nabije toekomst (3 maanden opzegtermijn)
- het vertrek van gepensioneerden (dit is reeds ruim van te voren bekend)
- de totale lengte van de aannemingsprocedure.

Tevens kan in dit beleid de situatie op de arbeidsmarkt worden meegenomen.

De modelvorming van vele systemen wordt echter bemoeilijkt door de geringe informatie die slechts aanwezig is. Bovendien is deze informatie vaak op niet equidistante tijdstippen bepaald; dit is het geval o.a. bij het opstellen van het wereldmodel van Forrester [1.4].

5. In de procesindustrie vinden vaak kwaliteitsmetingen plaats van producten. Hierbij wordt periodiek de samenstelling van een produkt nagegaan aan de hand van een monster. Het monster wordt in een laboratorium onderzocht met de hand, of automatisch bij het proces met speciaal ontwikkelde chemische analyseapparatuur.

Indien het monster in een laboratorium wordt onderzocht kost het enige tijd voordat het monster op het laboratorium is en voordat de resultaten van de analyse, die een eventuele ingreep in het proces noodzakelijk maken, zijn doorgegeven. Tevens duurt de analyse van het monster enige tijd en zullen de gegevens zodanig bewerkt moeten worden dat een interpreteerbare grootte ontstaat voor de regeling van het proces. Het volgende regelschema kan opgezet worden: (fig. 1.14)

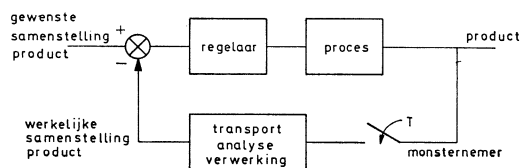


Fig. 1.14

De totale transport-, analyse- en verwerkingstijd van het monster is op te vatten als een dode tijd. Indien direct daarna weer het volgende monster wordt onderzocht is deze dode tijd T_D gelijk aan de bemonsteringstijd T . De bemonstering kan echter ook sneller (er worden dan meer analyses gelijktijdig verricht) of langzamer plaats vinden dan de totale benodigde transport-, analyse- en bewerkingstijd.

Indien de analyse van het monster automatisch bij het proces geschiedt, b.v. met behulp van een gaschromatograaf of een massaspektrometer, behoeft geen rekening gehouden te worden met een transporttijd maar dient wel een zekere analyse- en bewerkingstijd in acht genomen te worden die geïnterpreteerd wordt als een dode tijd.

De verwerking van de gegevens kan plaats vinden met behulp van een digitale rekenmachine die reeds voor andere doeleinden aan het proces gekoppeld is.

1.3 OPZETTELIJK BEMONSTERDE SYSTEMEN

Soms wordt het signaal opzettelijk bemonsterd. Hiervoor bestaan verschillende redenen.

1. Transport en verwerking van digitale signalen. De voordelen t.o.v. analoge signalen zijn de volgende:
 - a. eenvoudige opslag in een geheugen
 - b. nauwkeurige overdrachtsmogelijkheden; het signaal wordt door transmissie minder snel verminkt; ruis heeft veel minder invloed
 - c. nauwkeurige en veelzijdige verwerkingsmogelijkheden (digitale rekenmachines)
 - d. goede reproduceerbaarheid.

Een nadeel is dat het signaal meestal weer moet worden omgezet in een analogoog signaal met een digitaal-analoog omzetter, omdat slechts weinig elementen in regelsystemen rechtstreeks kunnen werken met digitale informatie. Toch zijn er volledig digitale systemen waarbij in het gehele systeem de informatie in digitale vorm aanwezig is, b.v. een positie servo-systeem, waarbij een stappenmotor wordt gebruikt (zie fig. 1.15)

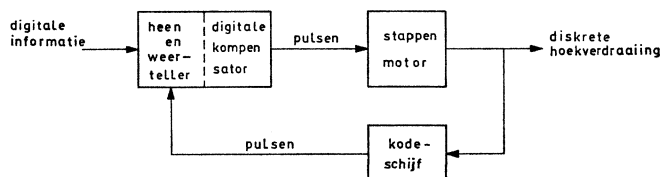


Fig. 1.15

De terugkoppeling via de kodeschijf wordt meestal achterwege gelaten, waardoor dus een sturing van de motor ontstaat.

Een belangrijke groep van digitale systemen vormen systemen waarin een digitale rekenmachine is opgenomen. Hierbij zal zowel een omzetting van analoge naar digitale grootheden als een omzetting van digitale naar analoge

grootheden plaatsvinden. In fig. 1.16 is een teruggekoppeld systeem waarin een rekenmachine is opgenomen, weergegeven.

In de rekenmachine kunnen mathematische bewerkingen worden uitgevoerd en beslissingen worden opgenomen. De mathematische bewerkingen kunnen

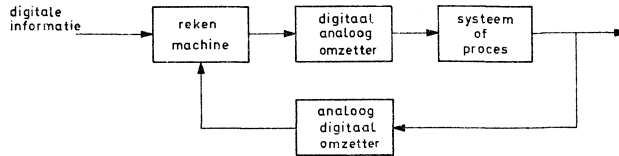


Fig. 1.16

in de eenvoudigste vorm betreffen het aftrekken van het ingangssignaal en het teruggekoppelde signaal en het realiseren van compensatie netwerken.

Niet-lineaire verbanden (zoals in niet-lineaire regelingen) of optimaliserende regelingen kunnen ook berekend worden. De beslissingen kunnen zijn: het nemen van veiligheidsmaatregelen, het treffen van voorzieningen bij alarmsituaties, enz. In hoofdstuk II, zal op het gebruik van een digitale rekenmachine in de regeltechniek nader worden ingegaan.

2. Verschillende grootheden kunnen beter digitaal dan analoog worden gemeten. De meetmethode wordt teruggebracht tot een telling, waardoor een grote nauwkeurigheid en vooral een grote reproduceerbaarheid kan worden verkregen.

Enkele mogelijkheden zijn:

a. een frekwentie kan worden gemeten door gedurende een nauwkeurig bepaald standaard tijdinterval het aantal keren te tellen dat het signaal een zeker niveau in eenzelfde richting passeert. Meestal is dit het passeren van het nulniveau van een negatieve naar een positieve waarde.

Het prinsipeschema is in fig. 1.17 weergegeven.

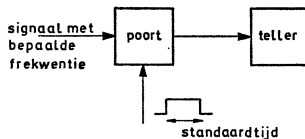


Fig. 1.17

De standaardtijd wordt afgeleid van een kristaloscillator.

Het begin van de telling (openen van de poort) geschiedt op een willekeurig tijdstip waardoor de nauwkeurigheid van de op deze wijze aangegeven methode één eenheid van de telling is, d.w.z. dat de nauwkeurigheid van de

meting bij een standaardtijd van 1 sek., 1 hz bedraagt. Bij het meten van lage frekventies is deze nauwkeurigheid klein.

Voor het verkrijgen van een grotere meetnauwkeurigheid is het mogelijk de standaardtijd te vergroten tot bijvoorbeeld 10 sek., doch meestal is het voor lage frekventies beter de frekwentiemeting uit te voeren volgens fig. 1.18. In deze schakeling wordt de poort gestuurd door het te meten signaal. De poort laat gedurende één of meer perioden van het te meten signaal pulsen (klokpulsen) door, waarvan de herhalingsfrekwentie bekend is (b.v. 1 Mhz). Het aantal doorgelaten pulsen wordt geteld en bepaalt de periode en dus de frekwentie van het te meten signaal. Andere mogelijkheden

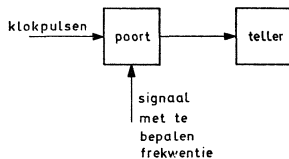


Fig. 1.18

om een grotere nauwkeurigheid te verkrijgen, zijn het toepassen van een aantal tellers, waarbij de doorgangen van verschillende signaalniveaus worden geteld of het toepassen van een aantal tellers, waarbij vertragingstijden in de standaardmeettijden worden aangebracht.

b. een toerental kan eveneens nauwkeurig door tellen worden bepaald.

Twee mogelijkheden zijn voor de hand liggend:

- tel het aantal omwentelingen per eenheid van tijd. In plaats van een geheel aantal omwentelingen te tellen, kan een incrementale kodeschijf worden aangebracht, die een omwenteling in bijvoorbeeld 1000 gelijke delen verdeelt. Het aantal incrementen per tijdseenheid is nu bepalend voor het toerental (fig. 1.19a).

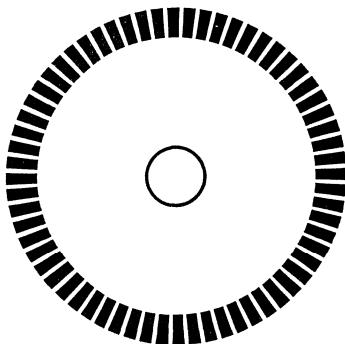


Fig. 1.19a

- meet de tijd van één omwenteling of door toepassen van een incrementale kodeschijf de tijd die nodig is om een bepaald deel van een omwenteling te doorlopen.
- c. het instellen van hoeken of lengtematen o.a. bij vuurleidingsystemen en bij gereedschapsbesturing kan eveneens numeriek geschieden.
- In principe zijn er hierbij twee mogelijkheden:
- de incrementale analoog-digitaal omzetter. Hierbij wordt de hoekstand bepaald uit het aantal pulsen dat voor de incrementale kodeschijf wordt afgegeven bij de verplaatsing vanaf een vorige hoekstand. De hoekstand wordt gevonden uitgaande van een bepaalde referentiehoek. Dit is een relatieve hoekstandmeting. Een lengtemaat kan worden verkregen met een incrementale kodeschijf via een wormwiel overbrenging (indirekte methode), of met een lineaal met incrementale verdeling (direkte methode).
 - de absolute analoog-digitaal omzetter. De hoekstand wordt rechtstreeks bepaald uit de stand van de kodeschijf. De hoekstand wordt in één of andere kode (b.v. binair of gray) aangegeven (fig. 1.19b). Er is dus geen referentie-hoekstand nodig. Een lengtemaat wordt gevonden uit de stand van een kodeschijf met binaire of gray kode (indirekte methode) of van een lineaal met gray kode of binaire kode (direkte methode).

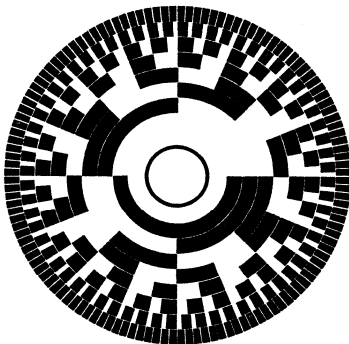


Fig. 1.19b

3. Doordat slechts een klein deel van de bemonsteringsperiode voor de bemonstering van het signaal nodig is, kunnen verschillende systemen achtereenvolgens worden bemonsterd. Door gemeenschappelijke reken- of regelapparatuur kunnen de gegevens van de afzonderlijke systemen worden verwerkt en vervolgens aan de betreffende systemen worden toegevoerd (zie fig. 1.20).

Dit principe staat bekend als time sharing.

Bij de afstandsmeting en besturing van raketten en satellieten en bij de

regeling van chemische processen is het economisch en praktisch noodzakelijk deze methode toe te passen. Ook in het dagelijks leven wordt time sharing toegepast. Voorbeelden zijn: het bedienen en controleren van instrumenten op een uitgebreid schakel- of regelpaneel en bij het autorijden, het sturen en schakelen, remmen en in het achteruitkijkspiegeltje kijken.

4. Door een meting slechts gedurende korte tijd te doen plaats vinden en niet continu kan de gevoeligheid van de meetmethode vergroot worden (chopper-bar galvanometer) en de belasting die het meetinstrument vormt verminderd worden (sommige uitvoeringen van schrijvers waarbij een naald die het te meten signaal volgt slechts gedurende een korte tijd tegen een waslaag wordt aangedrukt en daardoor slechts een geringe belasting vormt.)

5. Voor berekeningen is het mogelijk het signaal van continue systemen denkbeeldig te bemonsteren en deze systemen te beschouwen als systemen met signaalbemonstering. De berekening wordt hierdoor toegankelijk gemaakt voor een digitale rekenmachine.

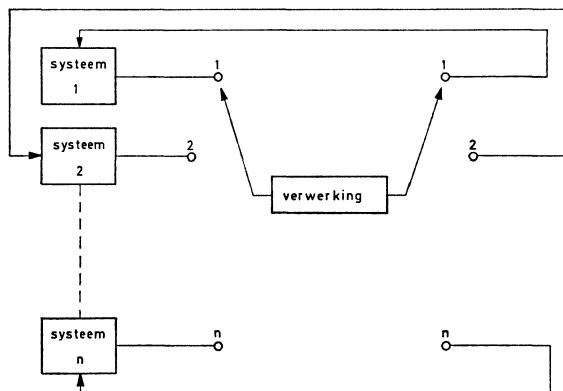


Fig. 1.20

Nadelen van systemen met opzettelijke signaalbemonstering zijn:

- Het regelsysteem wordt gekompliceerder en duurder. Er dienen extra omzettingen plaats te vinden van de analoge signalen, naar digitaal signalen en omgekeerd. Dit vereist extra interface apparatuur (zie hoofdstuk II).

Het aantal meetopnemers dat als uitgang een digitaal of diskreet signaal afgeeft is klein en bovendien zijn ze nog slechts voor het meten van enkele fysische grootheden voorhanden.

Ook de ingreep in het proces met behulp van kleppen of anderzijds, geschiedt nog het goedkoopst met analoog bestuurd kleppen.

- Door de bemonstering ontstaan hogere harmonischen die voor bepaalde elementen in de regelkring schadelijk kunnen zijn (slijtage van tandwieltreinen, verzadiging van versterkers).
- De stabiliteit van een regelsysteem met signaalbemonstering is behoudens in een klein aantal gevallen slechter dan van een continu regelsysteem. Voor kritisch ontworpen systemen kan dit een onoverkomenlijk bezwaar zijn.

II. De digitale rekenmachine in de regeltechniek

2.1 INLEIDING

Digitale rekenmachines spelen in de regeltechniek een steeds belangrijker rol; zij kunnen worden gebruikt voor:

- a. het analyseren en ontwerpen van regeltechnische systemen en bij de simulatie van regelsystemen.
- b. de toepassing als deel van één of meer regelsystemen.

Alvorens de eisen op te sommen die aan digitale rekenmachines voor deze doeleinden worden gesteld, wordt eerst nog kort ingegaan op de functionele eenheden van de digitale rekenmachine.

De belangrijkste functionele eenheden zijn:

- het (werk)geheugen
- het rekenorgaan
- het besturingsorgaan.

Zij vormen tesamen de centrale verwerkingseenheid van de machine (zie fig. 2.1).

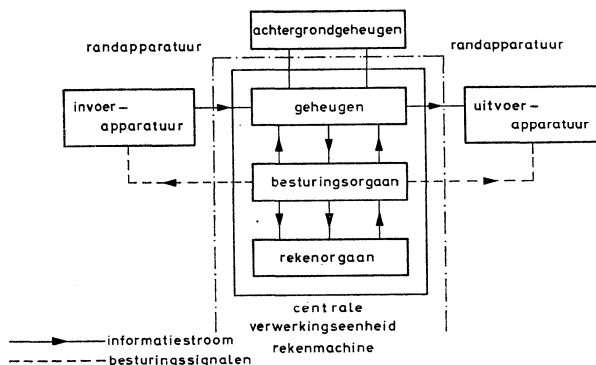


Fig. 2.1

Daarnaast zijn er nog een groot aantal elementen die tot de randapparatuur worden gerekend (periferie) maar een wezenlijk bestanddeel van de rekenmachineconfiguratie vormen. Een belangrijk onderdeel van de configuratie is de zogenaamde interface, die voor een goede samenwerking tussen de centrale verwerkingseenheid en de randapparatuur zorg draagt.

Tot de randapparatuur behoren een groot aantal elementen die zorgen voor een soort achtergrondgeheugen voor het snellere machinegeheugen, zoals: magnetische bandeenheden, trommelgeheugens en schijvengeheugens.

Een andere categorie van apparatuur verzorgt voornamelijk de functie van in- en uitvoer van gegevens zoals: typemachine, ponskaartlezer, ponsbandlezer en ponser. De behoefte aan een direkter contact tussen de mens en de rekenmachine heeft geleid tot de ontwikkeling van apparatuur als optische schriftlezers, en visual display units.

Tenslotte dient een voor de regeltechniek en andere technische toepassingen van belang zijnde groep apparatuur vermeld te worden die het rechtstreekse contact van de rekenmachine met technische systemen verzorgt. Hiertoe behoren analoog-digitaal en digitaal-analoog omzeters. Het is dus mogelijk door de keuze van de randapparatuur een rekenmachine configuratie op te bouwen die voor bepaalde toepassingen het meest geschikt is. Hierdoor kan voor een groot aantal toepassingen eenzelfde centrale verwerkingseenheid in aanmerking komen.

Toch kan men afhankelijk van het toepassingsgebied onderscheid maken tussen een aantal rekenmachines.

Een onderscheid vindt plaats naar de grootte van de machine waarbij de mode model heeft gestaan: maxi-, midi-, mini- en microcomputers. Veelal wordt hierbij een onderscheid naar de prijs van de centrale verwerkingseenheid gemaakt, die o.a. afhankelijk is van de woordlengte, snelheid, complexiteit van het besturingsorgaan en de maximale uitbreiding die aan de machine gegeven kan worden.

Een andere indeling die vooral door de historische ontwikkeling van de toepassingsgebieden verklaarbaar is, is de volgende:

1. *rekenmachines voor wetenschappelijke doeleinden*

Hierbij worden hoge eisen gesteld aan de eigenlijke rekeneenheid (arithmetic processor). Ingewikkelde mathematische uitdrukkingen moeten snel en nauwkeurig (grote woordlengte) kunnen worden opgelost. De machinetijd wordt vooral voor het rekenen gebruikt.

2. *rekenmachines voor administratieve doeleinden*

Hierbij worden hoge eisen gesteld aan de geheugenkapaciteit (magneetband eenheden, trommelgeheugens, schijvengeheugens). De berekeningen zijn meestal eenvoudig. De hoeveelheid informatie die aan de machine moet worden toegevoerd en afgevoerd is groot. De machinetijd wordt voor een groot deel gebruikt voor invoer en uitvoer van informatie en voor het sorteren van de grote hoeveelheden informatie.

3. *rekenmachines voor regeldoeleinden (process computers)*

Hierbij worden vooral hoge eisen gesteld aan de rekensnelheid, de betrouw-

baarheid van de installatie en de randapparatuur die het contact van de machine met het proces verzorgt.

Daarnaast zal de bedieningslessenaar die het contact tussen de bedieningsman en het proces verzorgt speciale aandacht vereisen.

In paragraaf 2.4 zal worden besproken hoe een rekenmachine in een proces kan worden opgenomen. De speciale eisen die dan aan een rekenmachine gesteld worden zullen daar geformuleerd worden.

Een andere indeling die wel gebruikelijk is, maakt onderscheid tussen: rekenmachines voor algemene doeleinden (general purpose computers) en rekenmachines voor speciale doeleinden (special purpose computers). Onder general purpose machine vallen de hiervoor genoemde rekenmachines, die hoewel ze elk afzonderlijk het meest geschikt zijn voor bepaalde werkzaamheden, toch voldoende flexibel zijn om ook voor alle hiervoor genoemde doeleinden gebruikt te worden. Deze flexibiliteit wordt voornamelijk verkregen door de software en randapparatuur.

Special purpose computers worden voor een beperkt toepassingsgebied gemaakt. De aard en het aantal bewerkingen die dan worden uitgevoerd is beperkt. Het programma is vaak vast (niet flexibel).

Het ontwerp van de special purpose computer kan zo gunstig mogelijk op het toepassingsgebied worden afgestemd, omdat slechts een beperkt aantal van alle mogelijkheden die een general purpose machine biedt, in dit ontwerp gerealiseerd dienen te worden. Het probleem is bij deze computers in hardware opgelost.

Special purpose computers zijn o.a. ontwikkeld voor vuurleidingsystemen en voor numeriek bestuurd gereedschapswerktuigen.

Het is ook mogelijk een vrij grote rekenmachineconfiguratie te gebruiken met een groot aantal andere gebruikers. Elke gebruiker is dan voorzien van een terminal dat verbonden is met de rekenmachine. Door de gebruikers wordt de machine dan gezamenlijk gebruikt. Elke gebruiker krijgt hierbij het idee dat de gehele rekenmachine voor hem werkt. Dit effect wordt verkregen omdat de informatie-overdracht van de machine naar de terminals veel langzamer plaats vindt dan de informatieverwerking binnen de machine zelf.

2.2 DE DIGITALE REKENMACHINE BIJ DE ANALYSE EN SYNTHESE VAN REGELSYSTEMEN

De digitale rekenmachine kan op de volgende wijzen gebruikt worden bij het oplossen en berekenen van regeltechnische problemen en bij het helpen ontwerpen van systemen.

1. De simulatie van systemen.

Differentievergelijkingen die het gedrag van bemonsterde systemen be-

schrijven kunnen gemakkelijk op een digitale rekenmachine geprogrammeerd worden.

Numerieke oplossingen worden in tabelvorm gegeven. Eventueel kunnen resultaten op een schrijver (plotter) of oscilloscoopscherm (graphical display unit) worden weergegeven. Een hybride opstelling kan gebruikt worden, waarbij delen van een systeem beschreven door differentiaalvergelijkingen, op analoge rekeneenheden gesimuleerd worden of delen van het werkelijke systeem zijn. Ook is het mogelijk continue systemen beschreven door differentiaalvergelijkingen op een digitale rekenmachine te simuleren, waarbij gebruik gemaakt kan worden van numerieke integratie methodes voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Speciale programmeertalen zijn ontworpen voor de digitale simulatie van continue systemen die het de gebruiker o.a. mogelijk maken dezelfde technieken toe te passen die in gebruik zijn bij de simulatie van continue systemen op analoge rekenmachines. (MIMIC, CSMP, enz.). Het systeem wordt vertolkt door een blokdiagram, waarvan de blokken o.a. bewerkingen voorstellen die ook in analoge rekenmachines gebruikelijk zijn.

2. Van de grote capaciteit van de digitale rekenmachine voor berekeningen kan veelvuldig gebruik gemaakt worden bij de analyse van regelsystemen. Veel reken- en tekenwerk kan door de rekenmachineconfiguratie worden overgenomen. De programmering is bij de huidige stand van de techniek ondanks de verschillende programmeertalen als Algol en Fortran en PL 1, tijdrovend. Als eenmaal een standaardprogramma bestaat, behoeft dit slechts te worden aangeropen, om een soortgelijk probleem op te lossen.

Voor regeltechnische toepassingen kan een groot aantal standaardprogramma's ontwikkeld worden. Voorbeelden hiervan zijn:

- het berekenen van de polen- en nulpunten van een overdrachtsfunctie
- het toepassen van stabiliteitscriteria
- het tonen van de frekwentiekarakteristiek en de poolbaan van het systeem als overdrachtsfuncties bekend zijn
- het bepalen van de frekwentiekarakteristiek uit de stapresponsie
- het berekenen van de overdrachtsfunctie uit de frekwentiekarakteristiek, de stapresponsie, wel of niet gedetermineerde testsignalen of andere meetgegevens over het systeem. Hiermee is een identifikatie van het systeem mogelijk.
- het tonen van de responsie van een gesimuleerd systeem op diverse ingangs- en stuursignalen.
- het berekenen van optimale regelstrategieën.

Door deze toepassing is het gebruik van diverse klassieke ontwerpmethoden, ook voor meer complexe systemen, mogelijk.

3. Het is mogelijk door de digitale rekenmachine beslissingen te laten nemen, waardoor de rekenmachine bij de synthese van systemen te gebruiken is.

De rekenmachine kan beslissen of een bepaalde opzettelijk aangebrachte verandering van een parameter van het systeem, een verbetering of een verslechtering van het gedrag van het systeem te weeg brengt. De optimale waarden van parameters kunnen op deze wijze via een bepaalde zoekprocedure door de rekenmachine gevonden worden. Het is ook mogelijk door de rekenmachine compensatienetwerken te laten berekenen, waarbij o.a. rekening kan worden gehouden met de meest gebruikelijke waarden van standaardcomponenten. De ontwerpmethoden zullen hierdoor een ander aksent kunnen krijgen.

Enkele methoden zijn bruikbaar voor een voortdurende automatische analyse van het systeem. Hierdoor is het bijvoorbeeld mogelijk een voortdurend aangepast model van het systeem te verkrijgen (up dating). Op dit model kunnen op versnelde tijdbasis diverse regelstrategieën worden uitgeprobeerd waarvan de beste kan dienen als strategie voor het werkelijke systeem. Hierbij wordt de rekenmachine ingeschakeld als een deel van het totale geregelde systeem.

Bij bovenstaande toepassingen worden enkele speciale eisen gesteld aan de rekenmachineconfiguratie. Voor een directe grafische representatie van resultaten (zoals bodediagram, polaire figuur, poolbaan, enz.) is een schrijver of graphical display unit gewenst.

Met behulp van een lichtpen kan informatie via een display unit aan de rekenmachine worden aangeboden. De lichtpen wordt hoofdzakelijk

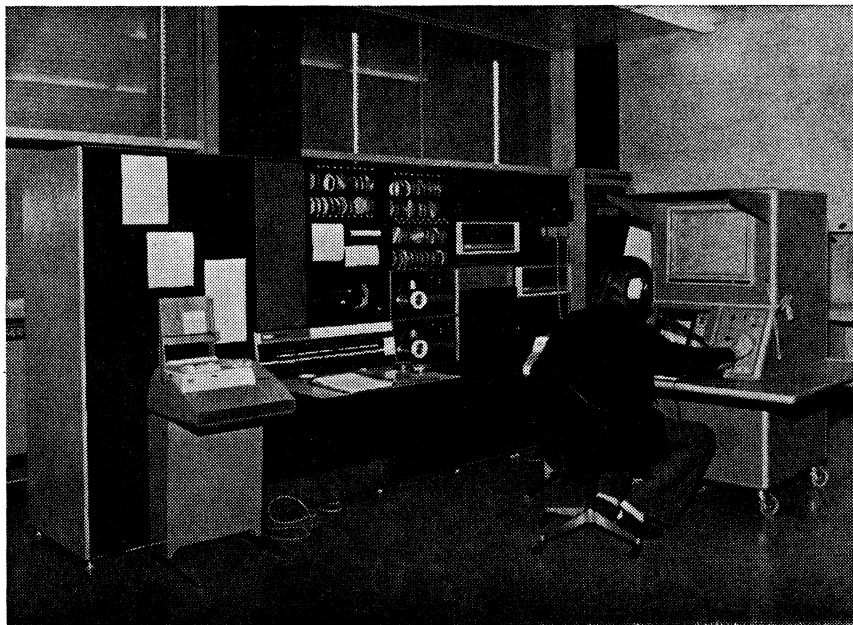


Fig. 2.2

gebruikt om hiermee kommando's te geven die een deel van een programma in werking stellen. Blok- en stroomschema's kunnen met behulp van een lichtpen op een scherm worden gegenereerd en extra blokken of takken kunnen op aanwijzing van de lichtpen worden toegevoegd.

In fig. 2.2 wordt een overzicht gegeven van de PDP-9 installatie (Digital Equipment Corporation) van het Laboratorium voor Regeltechniek (T.H.-Delft).

In fig. 2.3 is een voorbeeld van een stroomschema gegeven zoals dit gegenereerd wordt op de display unit.

De in deze paragraaf beschreven technieken worden wel gerekend tot de 'computer aided design' of 'computer assisted design' methoden.

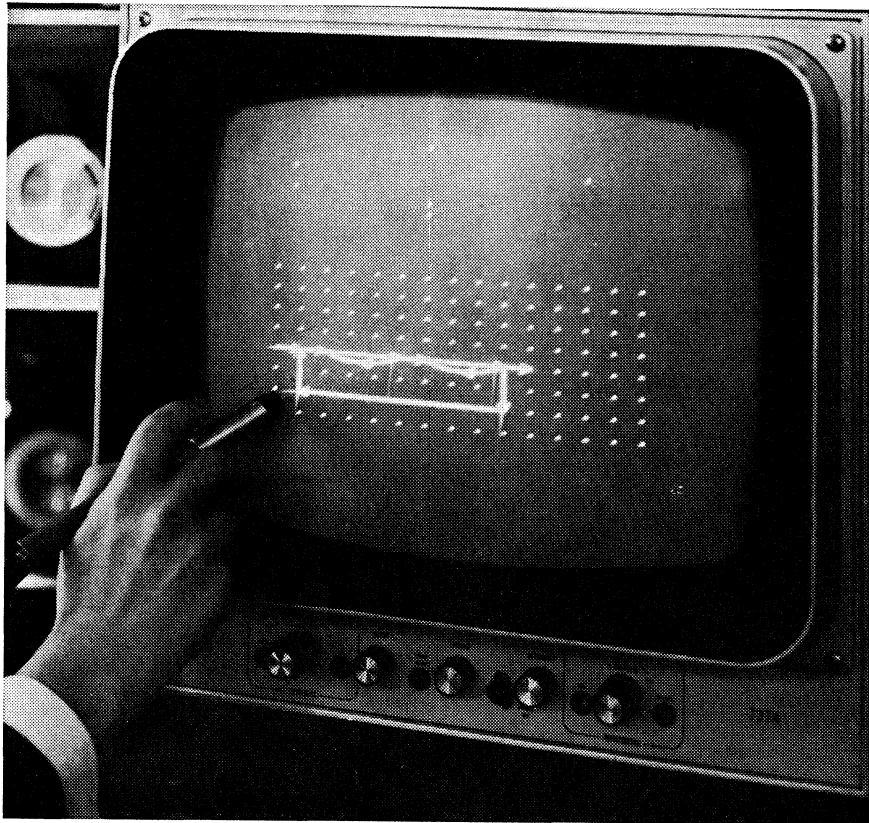


Fig. 2.3

2.3 DE TOEPASSING VAN DE DIGITALE REKENMACHINE ALS DEEL VAN ÉÉN OF MEER REGELSYSTEMEN

Bij de toepassing van de rekenmachine zoals in de voorgaande paragraaf beschreven, wordt de rekenmachine niet in het systeem zelf gebruikt. In de

hierna te bespreken toepassingen neemt de rekenmachine een al of niet centrale functie in het te regelen systeem in.

De toepassingsgebieden zijn te vinden in bijna alle takken van de techniek. Voorbeelden zijn:

De procesbeheersing en de optimalisering van chemische processen, zoals bij de petrochemische industrie, glas-, papier-, cement- en plastic-industrie. De regeling van ketels, turbines, generatoren en kernreactoren bij de opwekking van energie. De economische lastverdeling op korte en lange termijn bij de energieopwekking en -distributie. De regeling en optimalisering van het staalproces en de verwerking van staal (walsen, vertinnen enz.). Verder worden rekenmachines ingezet bij de regeling van het verkeer, in de scheep-, lucht- en ruimtevaart en bij de numerieke besturing van gereedschapsmachines, antennes en geschut. In de administratieve sector zou men het automatisch beoordelen van databestanden hiertoe ook kunnen rekenen.

Afhankelijk van het geregelde proces en de doelstelling waarvoor de rekenmachine wordt ingezet, dient deze te voldoen aan bepaalde eisen betreffende grootte en snelheid van het geheugen, in- en uitvoerfaciliteiten, woordlengte, enz.

De verschillende mogelijkheden waarop de rekenmachine bij de regeling, optimalisering en gegevensverwerking van een proces betrokken kan zijn zullen nu worden nagegaan.

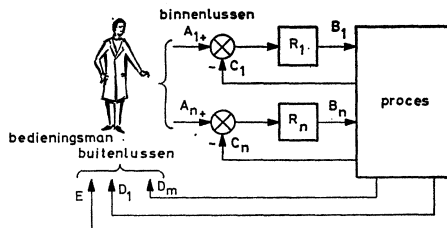


Fig. 2.4

Daartoe zal eerst worden aangegeven hoe de regeling van een multivariabel proces zonder rekenmachine plaats vindt (zie fig. 2.4).

In zo'n regelsysteem kunnen een aantal 'binnenlussen' en 'buitenlussen' worden onderscheiden. De 'binnenlussen' lopen via de konventionele regelaars $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$, die elk tot taak hebben een grootheid C_i van het proces (bijvoorbeeld een druk, een niveau, een temperatuur of een doorstroomhoeveelheid) gelijk te houden aan een instelwaarde ('set-point') A_i .

De regelaar bepaalt daartoe het verschil van A_i en C_i , en geeft aan de hand daarvan een signaal B_i aan het proces waardoor bijvoorbeeld de stand van een regelklep, de opbrengst van een pomp of de stand van een regelweerstand, wordt bestuurd.

De konventionele regelaars zorgen voor de stabilisering van de regelkringen en worden meestal eenmalig ingesteld volgens bepaalde instelregels. De buitenlussen zijn in tegenstelling tot de binnenlussen niet voorzien van een automatische regelaar. De ‘buitenlus’ loopt via een bedieningsman (‘operator’). De taak van deze man is de instelwaarden A_1, A_2, \dots, A_n te kiezen. Hij neemt daartoe de procesgrootheden D_1, D_2, \dots, D_m waar, ontvangt eventueel aanvullende informatie E van buitenaf, bepaalt daaruit de naar zijn mening gunstigste waarden van A_1, A_2, \dots, A_n en stelt die waarden op de regelaars in. De regeling via de buitenlussen heeft tot doel bij veranderende omstandigheden (vervuiling katalysator, verandering van de samenstelling van de grondstoffen, ander gewenst produkt, enz.) een optimale instelling te verkrijgen.

De buitenlus onderscheidt zich van de binnenlussen in de dynamiek. In de binnenlussen speelt zich de relatief kleine en snelle dynamica af, terwijl de dynamische verschijnselen in de buitenlussen zich op een grotere tijdschaal afspelen. In deze ‘grote’ dynamiek, zijn opstarttijd, vervuilingstijd katalysatoren, omschakelen naar andere eindprodukten of grondstoffen, belangrijke elementen; de ekonomie van een proces heeft hiermee direkt te maken. In de binnenlussen gaat het erom een gekozen werkpunt te bereiken en te handhaven, waarbij de dynamica van het proces en stabiliteitsproblemen een grote rol spelen.

Naar gelang de wijze waarop een rekenmachine in het proces wordt opgenomen wordt onderscheidt gemaakt in:

a. *regeling met een rekenmachine buiten de lus (off-line)*

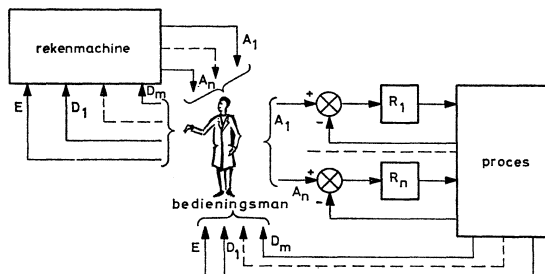


Fig. 2.5

De in fig. 2.5 afgebeelde configuratie staat bekend als de ‘bedieningsman buiten de lus’ (‘off-line operator guide’). In dit regelsysteem neemt de rekenmachine een deel van de taak van de bedieningsman over, en wel de berekening van de beste waarden van A_1, A_2, \dots, A_n aan de hand van de grootheden D_1, D_2, \dots, D_m en E .

De bedieningsman moet echter nog zelf de grootheden D en E aflezen, aan de rekenmachine toevoeren en de antwoorden die daarna uit de machine komen op de regelaars instellen. De rekenmachine wordt slechts gebruikt voor de verwerking van gegevens, maar is op geen enkele wijze rechtstreeks verbonden met het proces.

b. *het gebruik van een rekenmachine aan de lus (on-line)*

Een drietal mogelijkheden worden onderscheiden

- bedieningsman aan de lus (on-line operator guide)
- alarm-scanning
- data logging

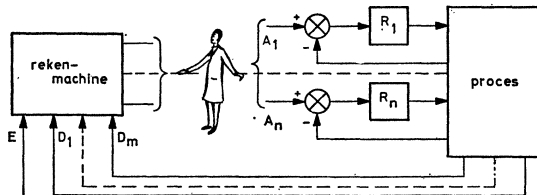


Fig. 2.6

De configuratie met de ‘bedieningsman aan de lus’ (on-line operator guide) gaat een stap verder dan de configuratie met de ‘bedieningsman buiten de lus’. De rekenmachine adviseert de bedieningsman, maar zorgt zelf voor zijn informatietoever (fig. 2.6). De rekenmachine dient nu wel in de nabijheid van het proces te staan. Er dient speciale aandacht besteed te worden aan de invoerfaciliteiten van de machine. Vaak wordt deze wijze van regelen in de overgangstijd van handregeling naar automatische regeling van de buitenlussen (supervisie regeling) gebruikt (zie punt c).

Wordt de rekenmachine gebruikt als alarm-aftaster (alarm-scanner) dan is de configuratie als in fig. 2.7. De rekenmachine bewaakt een aantal procesgrootheden F_1, F_2, \dots, F_p en geeft zonodig door middel van een bel, een lamp of het uittypen van een boodschap, een alarmsignaal aan de bedieningsman. Ook nu is de taak van de rekenmachine weer adviserend en wordt alleen een signaal gegeven bij het overschrijden van bepaalde waarden van procesgrootheden (operation by exception). Tevens is het mogelijk de rekenmachine hierbij een soort diagnose te laten verrichten van de mogelijke oorzaak van het alarm.

In fig. 2.8 is de configuratie gegeven waarbij de rekenmachine wordt gebruikt voor het verzamelen en berekenen van gegevens (data logging) voor later wetenschappelijk of administratief gebruik.

De procesgrootheden F_1, F_2, \dots, F_p worden in de rekenmachine gevoerd, de rekenmachine voert hier zonodig bewerkingen mee uit en de resultaten

worden in de vorm van de grootheden G_1, G_2, \dots, G_q , naar de registratie-apparatuur, meestal bandeenheden, gezonden.

De bewerkingen die in de rekenmachine met de gegevens worden uitgevoerd kunnen van geheel verschillende aard zijn. Voorbeelden zijn: het

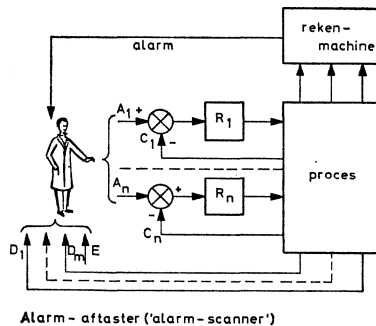


Fig. 2.7

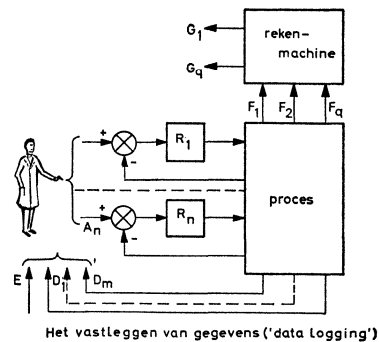


Fig. 2.8

korrigeren, filteren en reduceren van gegevens ten behoeve van periodieke rapporten over de werking van het proces of het berekenen van de statische en dynamische eigenschappen van de grote dynamica van het proces (up dating). Deze laatste gegevens kunnen gebruikt worden voor de optimalisering van het proces. Tevens kan de invloed van nog niet meegenomen parameters worden nagegaan.

Er kan in dit geval niet worden gesproken van regelen door de rekenmachine want het proces ontvangt niet rechtstreeks informatie uit de rekenmachine.

c. regeling met een rekenmachine in de lus (in-line)

Fig. 2.9 toont de configuratie van een 'supervisie-regeling' (supervisory control) ook wel indirecte digitale regeling (indirect digital control) genoemd.

Hierbij is de bedieningsman geheel door de rekenmachine vervangen, maar de binnenlussen zijn nog als in fig. 2.4.

Deze regeling wordt momenteel in de industrie toegepast met het doel het procesrendement te vergroten. Er behoeven geen extra maatregelen getroffen

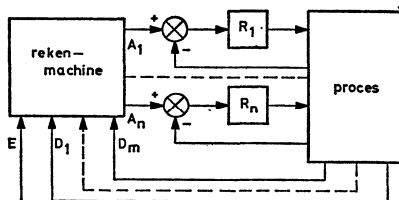


Fig. 2.9

te worden bij uitval van de rekenmachine. Tijdelijk kan een bedieningsman de taak van de rekenmachine overnemen. De invoer van deze wijze van regelen is mogelijk via tussenstappen (off-line en on-line operator guide), en is eenvoudig bij een bestaand proces te realiseren.

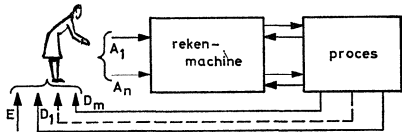


Fig. 2.10

Wat onder direkte regeling wordt verstaan (direct digital control = d.d.c.) toont fig. 2.10. De bedieningsman blijft de waarden A_1, A_2, \dots, A_n instellen op dezelfde wijze als in het systeem van fig. 2.4.

De konventionele regelaars zijn echter door de rekenmachine vervangen. Hierbij worden geheel andere eisen aan de rekenmachine gesteld dan in de vorige gevallen, i.v.m. de grotere snelheid van de binnenlussen. Nagegaan dient te worden in hoeverre de dynamische eigenschappen van de diverse lussen worden beïnvloed door deze digitale regeling. Deze wijze van regelen wordt in toenemende mate in de industrie ingevoerd met het doel de dynamische eigenschappen van het proces te verbeteren, een groot aantal instrumenten uit te sparen en meer geavanceerde regelingen op een flexibele wijze te kunnen invoeren. Er dienen echter extra voorzieningen getroffen te worden bij uitval van de rekenmachine. Een deel van de regelingen dient daartoe gedupliceerd te worden met konventionele regelaars (back up system), of er dient een tweede rekenmachine voor dit doel te worden ingeschakeld.

Vaak wordt d.d.c. regeling gekombineerd met een van de hiervoor genoemde regelingen.

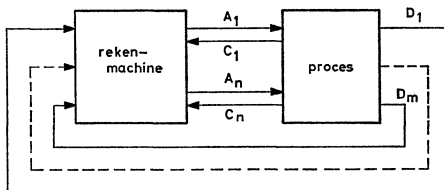


Fig. 2.11

Bij de volledige rekenmachine-regeling, fig. 2.11, zijn zowel de bedieningsman als de konventionele regelaars door de rekenmachine vervangen.

Een belangrijke plaats neemt de rekenmachine ook in bij de automatische sturing van een batch proces (diskontinu werkend produktieproces dat na

een bepaalde tijd een produkt aflevert en daarna opnieuw geladen moet worden). Hierbij spelen 'start up' en 'shut down' procedures een belangrijke rol. Met behulp van digitale rekenmachines kunnen deze processen zo economisch en veilig mogelijk beheerst worden.

De belangrijkste configuraties zijn de supervisie regeling en de volledig digitale regeling. Vele nieuwe installaties worden voorzien van een direkte digitale regeling, waaraan later een supervisie regeling wordt toegevoegd. 'Data logging', ook wel 'data acquisition' genoemd vindt in praktisch alle toepassingen plaats waarin een rekenmachine is opgenomen. Bij enkele industriële toepassingen wordt de supervisie regeling nog beheerst door een koördinerende rekenmachine die beslissingen neemt voor het gehele samenstel van produktie-eenheden binnen het bedrijf.

Wanneer dit het geval is spreekt men van een hiërarchie van rekenmachines waarin de rekenmachine voor de d.d.c. regeling de afzonderlijke regelkringen beheerst, de rekenmachine voor de supervisie regeling zorg draagt voor de optimalisering van de produktie-eenheid en de koördinerende rekenmachine de meest economische verdeling over de diverse produktie-eenheden verzorgt.

De koördinerende rekenmachine is meestal een administratieve rekenmachine. Voor het gebruik van de rekenmachine aan of buiten de lus kan vaak volstaan worden met een rekenmachine die reeds voor administratieve of wetenschappelijke doeleinden wordt gebruikt. Voor supervisie regeling dient de rekenmachine veel rekenwerk te verrichten waardoor dus in eerste instantie een machine voor wetenschappelijke doeleinden het meest in aanmerking komt. De geheugenkapaciteit moet groot zijn en er dient speciale aandacht besteed te worden aan de in- en uitvoer van gegevens vooral omdat de machine rechtstreeks ingrijpt in het proces. Voor direkte digitale regeling zijn voornamelijk rekenmachines ontwikkeld met de in paragraaf 2.4 geformuleerde eisen. De naam procesrekenmachine, hoewel niet algemeen gebruikt, zal in dit hoofdstuk voor deze machines worden aangehouden. Ook voor de supervisierегeling wordt vaak gebruik gemaakt van een procesrekenmachine.

Men vindt zowel de combinatie van d.d.c. en supervisie regeling in één rekenmachineconfiguratie als een scheiding van de beide regeltaken over één machine voor de supervisierегeling en één of meer machines voor de d.d.c. regeling.

Op de voor- en nadelen van alle bovenstaande configuraties waarin een digitale rekenmachine is opgenomen wordt hier niet ingegaan.

2.4 DE REKENMACHINE TOEGEPAST IN GEREGELDE PROCESSEN

Zoals in de voorgaande paragraaf reeds is aangegeven dient de computer die voor d.d.c. en/of supervisieregeling wordt ingeschakeld in ieder geval geschikt te zijn voor data acquisition en alarmscanning. Dit zijn vaak taken die de aanschaf van een komputer voor regeldoeleinden al reeds grotendeels rechtvaardigen. Bovendien zijn nog een aantal extra eisen nodig die hier worden samengevat zowel voor supervisie regeling als voor d.d.c. regeling. Indien men een machine aanschaf voor beide taken dient men met beide eisenpakketten rekening te houden.

Voor een rekenmachine geschikt voor supervisieregeling is vereist:

1. een hoge rekensnelheid, omdat de rekenprogramma's voor de optimalisering uitgebreide bewerkingen vereisen. Dit houdt in dat de toegangstijd (accesstijd) tot het snelle geheugen (werkgeheugen) kort dient te zijn. Vanzelfsprekend wordt bij een gegeven accesstijd bij een machine met een grotere woordlengte meer informatie verwerkt. Verder is de complexiteit van het rekenorgaan van belang (b.v. hardware floating point vermenigvuldiger). Hierdoor wordt de rekensnelheid eveneens vergroot.
2. een grote geheugenkapaciteit vanwege de in het algemeen grote programma's die herhaaldelijk gebruikt moeten worden en die vaak grote hoeveelheden gegevens gebruiken. Het werkgeheugen moet dus relatief groot zijn, terwijl het achtergrondgeheugen snel moet zijn.
3. Tevens dient extra aandacht besteed te worden aan de interface en aan de randapparatuur die voor het rechtstreekse contact met het proces nodig is (zie paragraaf 2.5). De snelheid, nauwkeurigheid en betrouwbaarheid van deze apparatuur is van groot belang.

Aan een rekenmachine voor d.d.c. toepassing dienen de volgende eisen gesteld te worden.

1. De rekensnelheid moet groot zijn, omdat de machine als onderdeel van een groot aantal regelkringen wordt gebruikt (vaak enige honderden) en in verband met tijdvertragingen die door het rekenen geïntroduceerd worden (vooral van belang bij snelle systemen zoals vuurleidingsystemen omdat de stabiliteit van de afzonderlijke regellussen in gevaar kan komen).

Dit impliceert niet alleen een snelle rekenmachine, maar ook efficiënt programmeren. Bij voorkeur moet in machinetaal of een sterk hiermee samenhangende taal geprogrammeerd worden. Fortran en Algol zijn ontwikkeld om het programmeren te vereenvoudigen, zij vereisen in het algemeen meer rekentijd. Naarmate meer termen in het rekenproces worden meegenomen, wordt meer tijdvertraging in de regelkring geïntroduceerd. Deze tijdvertraging kan nadelig op de stabiliteit van de regel-

kring werken. Indien tengevolge van het vele rekenwerk en het grote aantal regellussen de bemonsteringsfrequentie te laag gekozen moet worden heeft dit eveneens een nadelige invloed op de stabiliteit.

Als vuistregel worden wel de volgende bemonsteringstijden aangehouden:

doorstromingsregeling : 0,1 tot 1 sek.

drukregeling : 1 tot 5 sek.

temperatuurregeling : 10 tot 30 sek.

2. Naast de normale in- en uitvoerapparatuur als teletype, ponsbandlezer, ponsler, magneetbandeenheid, trommelgeheugen, enz., die slechts nodig zijn voor het programmeren en het intypen en opbergen van gegevens, dienen elektrische in- en uitvoerkanalen aanwezig te zijn voor het rechtstreekse contact met het systeem (zie paragraaf 2.5).
3. De geheugenkapaciteit hangt ten nauwste samen met de omvang van het proces (aantal regellussen). In een d.d.c. configuratie is het aantal berekeningen en de ingewikkeldheid daarvan gering, zodat het geheugen niet groot hoeft te zijn. Indien tevens een optimaliserende regeling moet plaats vinden neemt de behoefte aan geheugen sterk toe. Uiteraard speelt de programmering een grote rol bij de bepaling van de benodigde geheugenruimte.

Het is dan ook gewenst over een grote hoeveelheid software in de machinetaal van de rekenmachine te beschikken voor de rekenalgorithmen die nodig zijn voor de meeste voorkomende d.d.c. regelingen.

4. De woordlengte hoeft niet groot te zijn i.v.m. de beperkte nauwkeurigheid waarmee de meeste fysische grootheden gemeten kunnen worden.
5. De mogelijkheid van programma-interruptie met diverse prioriteitsniveaus door uitwendige signalen moet aanwezig zijn. Hierdoor kan in alarmsituaties worden overgeschakeld op een noodprogramma, dat veiligheidsmaatregelen treft. Ook voor time-sharing wordt deze interruptiemogelijkheid benut.
6. De bedieningslessenaar van de procesrekenmachine heeft een bijzondere taak, die geheel verschilt met die van de andere typen rekenmachines. De bedieningsman gebruikt deze lessenaar niet voor de programmering van de machine maar voor het opvragen en wijzigen van procesgegevens. Deze lessenaar dient zodanig te zijn uitgevoerd dat eenvoudig de te regelen grootheden kunnen worden opgevraagd en gegevens als gewenste waarde, proportionaliteitsgebied, integratietijd, enz., gewijzigd kunnen worden met behulp van een toetsenbord. Er dient veel aandacht besteed te worden aan ergonomische aspecten. Een automatische beveiliging zal ervoor zorgen dat niet te grote wijzigingen in een regelkring worden geïntroduceerd. Verder zullen ongevraagd meldingen plaatsvinden als bepaalde grootheden buiten hun grenzen komen en zo mogelijk een foutdiagnose

door de rekenmachine uitgevoerd moet worden. Deze gegevens dienen tevens op een typemachine te worden uitgevoerd, waardoor een logboek wordt bijgehouden.

2.5 DE IN- EN UITVOER VAN PROCESGEGEVENS IN DE REKENMACHINE

In deze paragraaf zal nader worden ingegaan op de in- en uitvoerfaciliteiten van een procesrekenmachine voor het directe contact van de machine met het proces.

Aan de machine moet informatie worden toegevoegd in de vorm van elektrische signalen. Vele meetopnemers in de procesindustrie hebben een pneumatisch uitgangssignaal, zodat een omzetting naar een elektrisch signaal nodig is. Verder is het soms nodig de signalen te filteren en aan te passen afhankelijk van de te verwachten ruis op het signaal, de lengte waarover het signaal vervoerd dient te worden, impedantieniveaus, enz. Tevens dienen de uitgangssignalen aangepast te worden aan de standaard-niveaus die in de procestechiek gebruikelijk zijn.

De elektrische signalen kunnen op de volgende wijzen aan de rekenmachine worden toegevoerd of uitgevoerd.

1. *Digitale invoer*

Gegevens over bepaalde grootheden in een proces kunnen in digitale vorm aanwezig zijn, bijvoorbeeld de stand van een teller, een register of de stand van een absolute kodeschijf die een hoekstand aangeeft. Deze gegevens kunnen via een buffer aan de rekenmachine worden toegevoerd. Ook kan de stand van een bepaald contact aan de rekenmachine worden doorgegeven, bijvoorbeeld de stand van een eindschakelaar, of contacten die pas gesloten worden indien een druk, een niveau of een temperatuur te hoog oplopen. Vaak zal er dan sprake van een noodsituatie zijn, zodat deze gegevens via een prioriteitsinterruptie aan de rekenmachine worden doorgegeven. Het is ook mogelijk de stand van de schakelaars op vaste tijdstippen na te gaan. De prioriteitsinterruptie heeft echter het voordeel van een operation by exception waardoor minder rekenmachinetijd nodig is. Meestal wordt een groep contacten gelijktijdig ingelezen in een inleesregister van de machine.

Wanneer het aantal bewerkingen dat door de rekenmachine zelf verricht moet worden om de informatie te verkrijgen te groot wordt gaat men over tot een speciale besturingseenheid die b.v. slechts de veranderingen van bepaalde contacten doorgeeft. Van groot belang is ook de ontwikkeling van meetopnemers die digitale informatie afgeven. De ontwikkeling van deze opnemers is echter moeilijk voorspelbaar.

2. Digitale uitvoer

Het is soms mogelijk digitale gegevens rechtstreeks toe te voeren aan een element dat ingrijpt in het proces. De stand van een buffer bepaalt de informatie die aan de regelkring moet worden doorgegeven. Bij een stappenmotor wordt een aantal pulsen aan de motor toegevoerd dat overeenkomt met de stand van een buffer. Hierbij neemt de stappenmotor evenveel stappen als er pulsen worden toegevoerd. De stappenmotor is dus op te vatten als een DA omzetter. De stappenmotor bedient een klep of regelt de luchtdruk die nodig is voor de verstelling van een pneumatische klep. De stand van de buffer kan ook de ontsteekhoek bepalen van een SCR-gestuurde motor. Verder is het mogelijk dat de digitale informatie in een buffer bepaalt hoelang welk magneetventiel geopend dient te worden om meer of minder lucht toe te voeren aan een pneumatische klep (zie fig. 2.12).

Het is ook mogelijk dat de stand van een buffer de stand aangeeft van een aantal contact uitgangen die er voor zorgen dat pompen, motoren of magneetventielen worden in- of uitgeschakeld via relais.

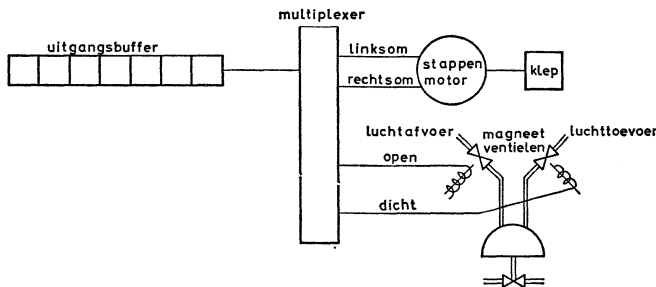


Fig. 2.12

3. Analoge ingangen

Indien het aangeboden signaal analoog is, dient het te worden toegevoerd aan een AD-omzetter.

Een AD-omzetter is kostbaar zodat deze omzetter in time sharing wordt gebruikt. Hiertoe wordt tussen de aangeboden analoge signalen en de AD-omzetter een multiplexer of scanner geplaatst (fig. 2.13).

Vanzelfsprekend wordt de totale omzettingstijd door het gebruik van multiplexers vergroot. De tijd van omzetting van het signaal in de AD-omzetter neemt toe bij grotere gewenste nauwkeurigheid. Er dienen een groot aantal signaalaanpassingen en signaalomzettingen plaats te vinden die schematisch zijn aangegeven in fig. 2.13. Afhankelijk van de kostbaarheid van de apparatuur en de benodigde snelheid kan multiplexing of scanning worden toegepast. Bovendien kunnen bepaalde bewerkingen ruimtelijk gezien zowel dicht bij de rekenmachine als dicht bij het proces plaatsvinden hetgeen van belang is zowel vanwege het kostenaspect als vanwege de betrouwbaarheid

van de totale signaalketen. Pneumatische uitgangssignalen dienen eerst omgevormd te worden naar elektrische signalen (stroombronschakeling i.v.m. gevoeligheid voor storingen). Elektrische signalen afkomstig van meetopnemers dienen soms ook te worden aangepast (thermokoppel-

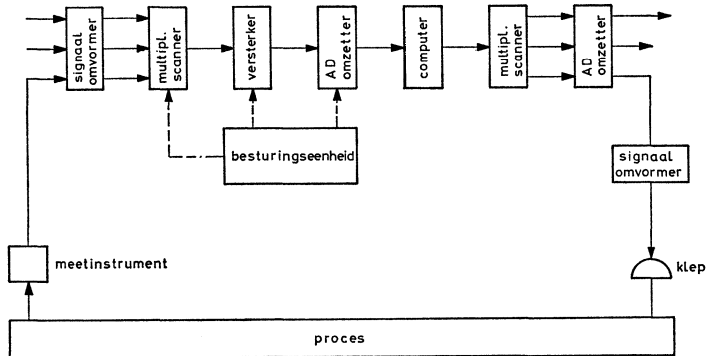


Fig. 2.13

signalen). Indien wordt aangenomen dat de multiplexer dichtbij de rekenmachine staat opgesteld zal bijzondere aandacht aan de bedrading moeten worden besteed (getwist, aarding, afscherming, routing).

Vaak wordt het signaal nog laagfrequent gefilterd voordat het wordt toegevoerd aan de multiplexer. De signaaloverdracht vindt plaats m.b.v. 'flying capacitors' (zie fig. 2.14).

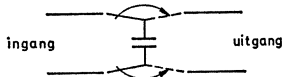


Fig. 2.14

De schakelaars kunnen elektromechanisch of als solid state schakelaars (FET transistors) worden uitgevoerd, o.a. afhankelijk van het aantal schakelingen dat per sec. moet plaats vinden. De aldus gediskretiseerde signalen zijn vaak nog van verschillende niveaus en dienen te worden aangepast aan het standaardniveau van de AD omzetter. Het is mogelijk per ingangssignaal een versterking toe te passen vóór de multiplexer maar meestal zal een aantal versterkers na de multiplexer worden toegepast waarbij het signaal via één van deze versterkers naar de AD omzetter gaat. Een besturingsorgaan zorgt voor het juiste samenspel tussen de diverse bewerkingen; geeft achter-eenvolgens stuurpulsjes af om de ingang van de multiplexer te selecteren, de juiste versterker in te schakelen en de AD omzetting te starten (zie fig. 2.15).

4. Analoge uitgangen

Via digitaal-analoog omzetting wordt het signaal aan het proces toegevoerd. De omzettijd en de kosten van een DA-omzetter zijn geringer dan van een AD-omzetter. Het is nodig de informatie voor de regelkring analoog ter beschikking te hebben totdat door de rekenmachine nieuwe informatie

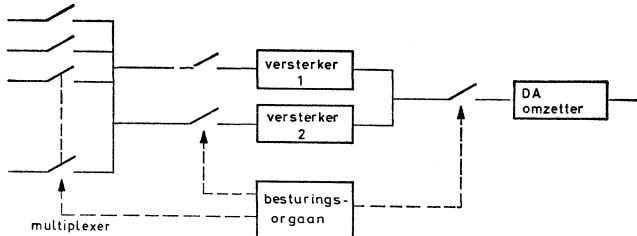


Fig. 2.15

voor de betreffende regeling wordt aangeboden. Elke kring kan voorzien zijn van een DA omzetter of men kan volstaan met één DA omzetter gevolgd door een multiplexer. De uitgaande lijnen van deze multiplexer zijn dan voorzien van houdversterkers (zie fig. 2.16).

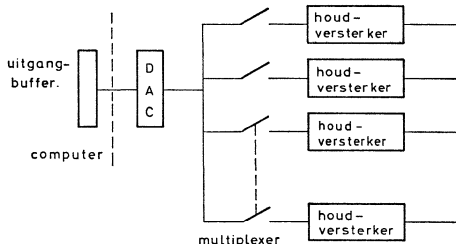


Fig. 2.16

Indien de rekenmachine is opgenomen in een supervisierегeling zorgt een zogenaamd computer setpoint station voor de DA-omzetting van de door de rekenmachine berekende gewenste waarde. Tevens is dit apparaat voorzien van een houdschakeling, die de gewenste waarde konstant houdt tot de volgende gewenste waarde door de rekenmachine wordt doorgegeven.

Eventueel dient nog een omzetting van stroom of spanning naar druk plaats te vinden indien de regelaar pneumatisch is.

Indien de rekenmachine is opgenomen in een d.d.c. regeling, kan via een DA-omzetter een klepmotor of pomp worden gestuurd maar het is ook mogelijk direct een stappenmotor te gebruiken die tevens de functie van een DA-omzetter heeft.

Tenslotte dient nog gewezen te worden op de moeilijkheden die ontstaan bij het transport van de informatie van de rekenmachine naar het proces en omgekeerd. Bij een centrale opstelling van de rekenmachine kunnen deze afstanden vrij aanzienlijk worden. Moeilijkheden ontstaan in verband met ruis, aarding, aanpassing, afscherming, enz. Om de invloed van deze storingen tegen te gaan dienen voor elk informatiekanaal de nodige maatregelen genomen te worden, hetgeen vrij kostbaar kan worden. Door de analoge signalen reeds bij het proces om te zetten in een digitaal signaal via een multiplexer en AD-omzetter voor b.v. 25 ingangen (remote digitalization) wordt een verbetering bereikt van de signaal/ruis verhouding van het te verzenden signaal. Bovendien wordt een aanzienlijke besparing verkregen in de bedrading. Hetzelfde geldt ook voor de omzetting van digitale signalen uit de rekenmachine in analoge signalen bij het proces. Ook hierbij kan de omzetting dichtbij het proces plaatsvinden via een multiplexer.

De betrouwbaarheid van de rekenmachine wordt uitgedrukt in twee getallen: MTBF (mean time between failure) en availability.

De MTBF wordt uitgedrukt in het gemiddeld aantal uren dat de machine zonder storing werkt. Indien de storingen zeer snel verholpen kunnen worden is de machine gedurende een hoog percentage van de tijd beschikbaar. Deze beschikbaarheid wordt uitgedrukt in % van de totale tijd. Een grote MTBF en een korte reparatietijd geven dus een availability die dichtbij de 100% ligt. Door niet één grotere machine voor de d.d.c. regeling te gebruiken maar een aantal kleinere machines die gedeeltelijk elkaars taak kunnen overnemen is het eveneens mogelijk de betrouwbaarheid van de installatie op te voeren. De MTBF neemt sterk toe voor procescomputers, t.g.v. de grote inspanning die verricht wordt op het gebied van computers voor de ruimtevaart (zie fig. 2.17).

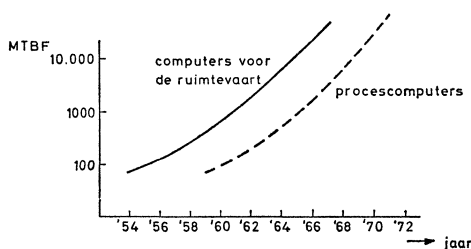


Fig. 2.17

III. Bemonstering en rekonstruktie van signalen

3.1 VERSCHILLEN TUSSEN SYSTEMEN MET SIGNAALBEMONSTERING EN KONTINUE SYSTEMEN

In de systemen die in deze monografie besproken worden komen een aantal signaaltypen voor. De signalen kunnen continu of diskreet in de tijd en analoog of gekwantiseerd in amplitude zijn.

Het diskretiseren in de tijd van een continu signaal wordt signaalbemonstering genoemd. De omzetting van een signaal dat diskreet in de tijd is naar een continu signaal wordt signaalrekonstruktie genoemd.

In fig. 3.1 is een veel voorkomende configuratie getekend waarin een aantal signaaltypen aanwezig is.

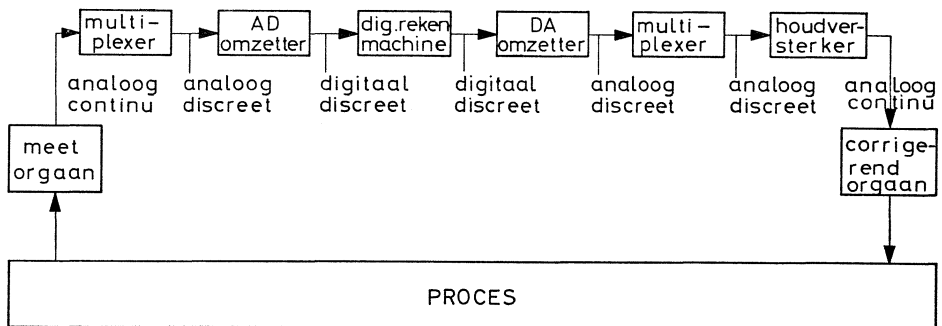


Fig. 3.1

Er vindt een overgang van continue naar diskrete signalen en omgekeerd plaats. Door toekenning van getallen (meestal binair gekodeerd) aan de kwantiseringniveaus wordt het gekwantiseerde signaal gepresenteerd als een rij getallen. Er volgt nu een korte beschrijving van de functies van de elementen die in de regelkring van fig. 3.1 voorkomen.

Het meetorgaan geeft informatie over de te regelen grootte, b.v. in de vorm van een elektrisch of pneumatisch signaal. Hierna vindt eventueel aanpassing van het signaal plaats (pneumatisch-electrische omvormers, signaalversterkers, enz.), voordat het signaal wordt aangeboden aan de multiplexer. In the multiplexer vindt de *bemonstering* van het signaal plaats

(in fig. 3.1 is slechts één van de regelkringen getekend maar in de multiplexer komen in het algemeen de signalen van vele regelkringen binnen).

De analoog digitaal omzetter (AD omzetter) zorgt voor de *kwantisering* en de *kodering* van het bemonsterde signaal. Hierna vindt in de digitale rekenmachine een *digitale bewerking* plaats. De uitkomsten van deze bewerking komen periodiek ter beschikking van een digitaal analoog omzetter (DA omzetter). Hierin vindt *dekodering* van het signaal plaats.

Dit signaal kan rechtstreeks aan een houdversterker worden aangeboden of via een multiplexer bemonsterd worden en daarna aangeboden worden aan een houdversterker. In de houdversterker wordt het signaal weer continu gemaakt tussen de bemonsteringstijdstippen. Deze bewerking wordt *rekonstructie* genoemd.

Het bemonsteren en rekonstrueren van het signaal wordt ook vaak in één element, de bemonster- en houdschakeling (sample and hold), verricht. Hierna wordt het signaal aan een korrigerend orgaan (b.v. een klep) aangeboden, eventueel na een of meer signaalomzettingen (b.v. elektrisch-pneumatische omzetting). In fig. 3.2 zijn de bewerkingen zoals deze zojuist aan de elementen zijn toegekend, weergegeven.

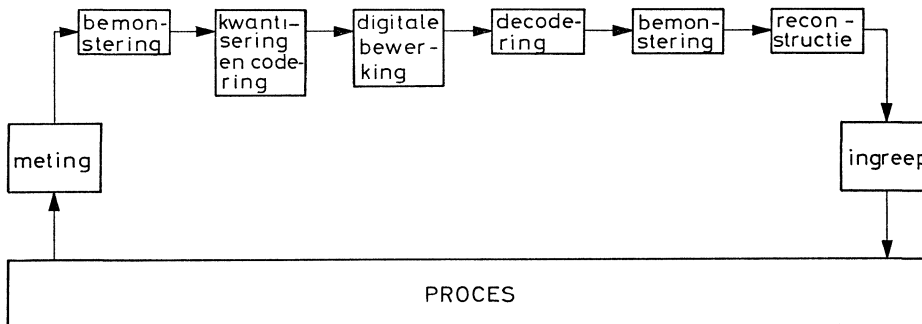


Fig. 3.2

Ten opzichte van continue systemen zijn nieuwe bewerkingen:

- de (signaal)bemonstering
- de kwantisering en kodering
- de digitale bewerking
- de dekodering
- de (signaal)rekonstructie.

In een continu systeem is tussen het meetinstrument en het korrigerend orgaan het regelorgaan aanwezig.

In het algemeen heeft de kwantisering, kodering en dekodering weinig invloed op het totale systeemgedrag. De graad van kwantisering wordt, namelijk bepaald door het aantal bits van de AD en DA omzeters.

Voor de eenvoud wordt aangenomen dat het aantal bits van de AD en DA omzeters gelijk is: N . De niet-lineaire effecten en de kwantiseringsruis die door de kwantisering ontstaan zijn bij grote waarde van N te verwaarlozen.

De rekenmachine is op te vatten als een diskreet element waarvan het verband tussen de in- en uitgang wordt beschreven door een differentievergelijking. In hoofdstuk IV wordt hier nader op ingegaan. In dit hoofdstuk wordt de bemonstering en rekonstruktie nader beschreven.

Bij verwaarlozing van de kwantisering, codering en dekodering blijft het schema over van fig. 3.3.

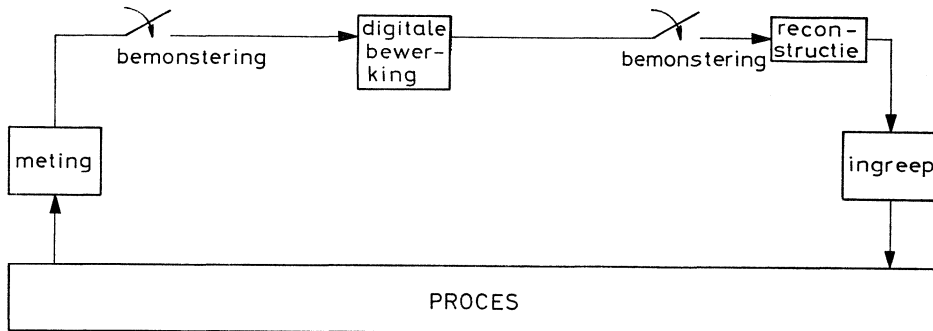


Fig. 3.3

Diskrete en continue elementen in een blokschema worden altijd gescheiden door een schakelaar die de bemonstering voorstelt, terwijl bij de overgang van diskrete naar continue signalen altijd signaalrekonstruktie zal plaatsvinden.

3.2 HET BEMONSTERINGSPROCES

3.2.1 Inleiding

Bij de beschrijving van het bemonsteringsproces kan men onderscheid maken in uitvoeringsvormen van schakelaars of bemonsteraars (samplers) en de mathematische beschrijving hiervan.

Het blijkt mogelijk te zijn bemonsteraars waarvan de werking fysisch gezien geheel verschillend is, op dezelfde wijze mathematisch te beschrijven.

Enige uitvoeringsvormen waarin bemonstering voorkomt zijn:

- a. Een analoog-digitaal omzetter voorafgegaan door een multiplexer. In feite vindt de bemonstering van de signalen plaats door de multiplexer, bestuurd door de rekenmachine of een besturingsorgaan.
- b. Een monsternemer in de chemische analyse. Hierbij wordt een monster

van het te onderzoeken produkt (via een monsternemer) toegevoerd aan analyse apparatuur, b.v. een gaschromatograaf.

- c. Het op regelmatige tijden verwerken van gegevens over voorraden, bestellingen en verkoop, en het opmaken van kwartaal- en jaaroverzichten kan men beschouwen als het bemonsteren van de situatie van het bedrijf. De vrijwel kontinu variërende gegevens worden dus op bepaalde tijden als maatgevend voor beslissingen op bedrijfskundig terrein geïnterpreteerd.

In praktisch elk systeem waarin de mens handelend optreedt kan men spreken van de bemonstering van de hoeveelheid informatie.

- d. Een sample en hold-circuit kan eveneens worden opgevat als een schakelaar die de analoge informatie overneemt uit de DA omzetter.

Het bemonsteringsproces, zoals dit in deze monografie in het`vervolg ter sprake komt kan op de volgende twee manieren fysisch worden beschreven:

1. Het bemonsteringsproces wordt opgevat als een schakelaar S die het signaal al dan niet doorgeeft (zie fig. 3.4a).
2. Het bemonsteringsproces wordt beschreven als een modulatieproces in de vorm van pulsamplitude-modulatie (zie fig. 3.4b).

Ad 1. Op bepaalde tijden wordt het signaal $x(t)$ doorgelaten gedurende een

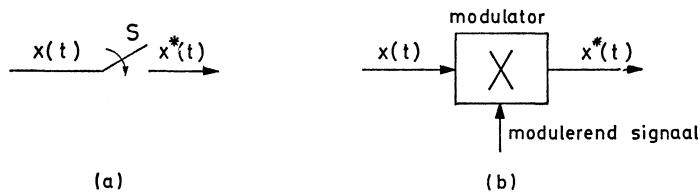


Fig. 3.4

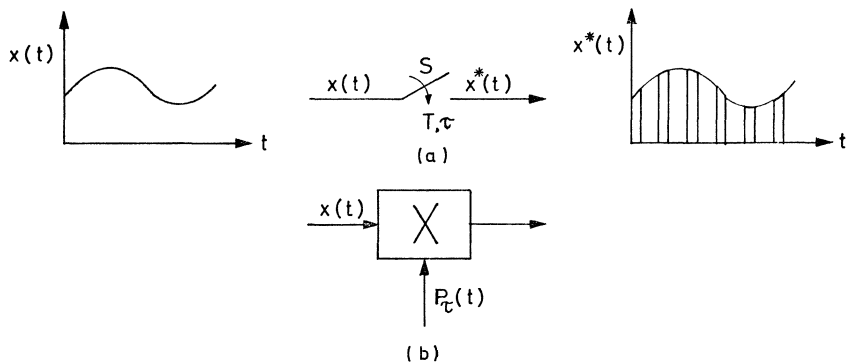


Fig. 3.5

korte tijdsduur τ . Het aldus verkregen signaal wordt $x^*(t)$ genoemd. De schakelaar S is slechts een symbolische voorstelling van een element dat een soortgelijke functie verricht.

Beschouwd wordt het geval dat de schakelaar periodiek sluit met een bemonsteringstijd T . Tevens wordt aangenomen dat de schakelaar gedurende een bemonsteringsduur τ gesloten is (zie fig. 3.5).

Ad 2. De modulator vermenigvuldigt hetingangssignaal $x(t)$ met een pulsreeks $p_\tau(t)$ van pulsen met een hoogte 1 en een breedte τ (zie fig. 3.6). Het signaal $x^*(t)$ kan mathematisch beschreven worden door

$$x^*(t) = p_\tau(t) x(t) \quad (3-1)$$

Het signaal in fig. 3.5b wordt verkregen na vermenigvuldiging van het signaal $x(t)$ en het signaal $p_\tau(t)$ van fig. 3.6.

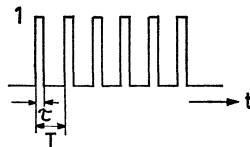


Fig. 3.6

Het signaal $x^*(t)$ kan toegevoerd worden aan een continu systeem via een rekonstruktieproces of kan verwerkt worden in een diskreet element van het systeem, meestal na codering van het signaal.

Rekonstruktie van het diskrete signaal $x^*(t)$ dat wordt toegevoerd aan een diskreet element is niet nodig daar dit element slechts kan werken met informatie die op diskrete tijdstippen wordt toegevoerd of afgevoerd.

Natuurlijk is wel een digitale rekonstruktie mogelijk waarbij de informatie van voorgaande tijdstippen gewogen wordt meegenomen (exponential smoothing filter en moving average filter, zie hoofdstuk XI). De werking van een diskreet element wordt vertolkt door een differentievergelijking waarbij het tijdinterval T bij konstante koëfficiënten van de differentievergelijking geen invloed heeft. Indien het diskrete signaal via een rekonstruktieproces wordt toegevoerd aan een continu element zal T , zoals nog zal blijken, wel degelijk van belang zijn voor de systeemeigenschappen.

3.2.2 Discrete elementen en het bemonsteringsproces

Indien $x^*(t)$ wordt toegevoerd aan een discreet element (zie fig. 3.7) is het signaal $x^*(t)$ op te vatten als een rij getallen $x(nT) = \{x(0), x(T), x(2T), \dots\}$ die op discrete tijdstippen $t = 0, T, 2T, \dots$ enz. bekend zijn.

De uitgang van het element genereert eveneens een rij getallen $y(nT) = \{y(0), y(T), y(2T) \dots\}$. Deze rij is eveneens op te vatten als een bemonsterd signaal $y^*(t)$. De differentievergelijking kan de vorm hebben

$$\begin{aligned}
 & a_0 x(kT) + a_1 x(kT-T) + \dots + a_i x(kT-iT) + \dots + a_n x(kT-nT) \\
 & = y(kT) + b_1 y(kT-T) + \dots + b_j y(kT-jT) + \dots + b_m y(kT-mT)
 \end{aligned}
 \tag{3-2}$$

waarin a_i en b_j konstante koëfficiënten zijn (zie verder hoofdstuk IV).

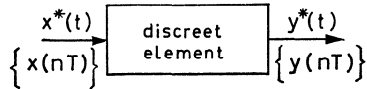


Fig. 3.7

Deze vergelijking kan worden opgelost door:

1. De vergelijking rekursief op te lossen, d.w.z. $y(kT)$ te bepalen uit de kennis van $x(nT)$ voor $n = k, k-1, \dots$ en $y(nT)$ voor $n = k-1, k-2, \dots$. Hierna kan $y(kT+T)$ bepaald worden uit $x(nT)$ voor $n = k+1, k, k-1, \dots$ en $y(nT)$ voor $n = k, k-1, k-2, \dots$ (zie verder hoofdstuk IV).
2. De vergelijking analytisch in het tijddomein op te lossen.
3. De vergelijking te transformeren naar een ander domein, het z -domein (vergelijk de transformatie van een differentiaalvergelijking m.b.v. de Laplace-transformatie) en de vergelijking in dit domein op te lossen en terug te transformeren. Hierbij zal de z -transformatie een belangrijke rol spelen (zie hoofdstuk V).

3.2.3 *Kontinue elementen en het bemonsteringsproces*

Een continu element wordt beschreven door een differentiaalvergelijking. Neem aan dat het bemonsterde signaal $x^*(t)$ wordt toegevoegd aan een continu element (fig. 3.8).

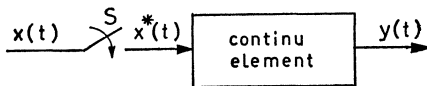


Fig. 3.8

In principe zijn er twee mogelijkheden om de verwerking van de bemonsterde informatie door het continue element te beschrijven:

1. Door de uitgang van het element slechts op diskrete tijdstippen te beschouwen kan de werking van het element worden beschreven als die van een diskreet element. Hierdoor wordt het continue element dus aangepast aan het intermitterende karakter van $x^*(t)$ en wordt het verband tussen de in- en uitgang van het element beschreven door een differentievergelijking.

Meestal vindt de vertaling van de differentiaalvergelijking naar de differentievergelijking plaats via de overdrachtsfunctie van het continue systeem naar de overdrachtsfunctie van het diskontinue systeem (fig. 3.9) (zie verder hoofdstuk V).

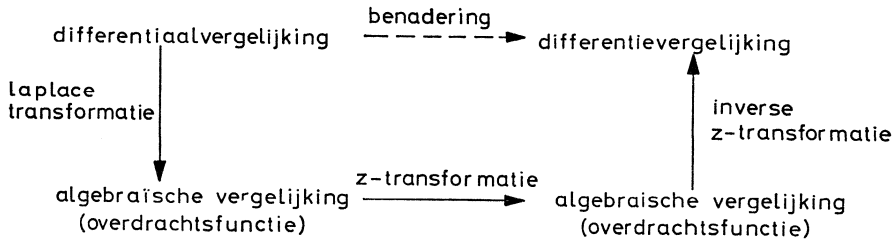


Fig. 3.9

2. Het gebruik van een mathematische beschrijving van $x^*(t)$ die is aangepast aan de beschrijvingswijzen van continue systemen. Op deze mogelijkheid zal in dit hoofdstuk nader worden ingegaan.

De verwerking van bemonsterde informatie door continue elementen d.w.z. elementen met een continue uitgang, geschiedt in de praktijk door de volgende categorieën elementen.

- a. Elementen, zoals AD omzeters en houdschakelingen, die uitsluitend reageren op de *hoogte* van de aangeboden pulsen en niet op de pulsbreedte. De pulsbreedte dient hierbij voldoende klein te zijn opdat het signaal nagenoeg konstant blijft gedurende de tijd dat de puls wordt aangeboden. Dergelijke systemen kunnen worden gekarakteriseerd door een 'pulshoogteresponsie' $g(t)$.

Stuurt men het door (3-1) gegeven bemonsterde signaal door een systeem gekarakteriseerd door de pulshoogte-responsie $g(t)$ dan kan het uitgangssignaal van dit systeem worden geschreven als:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)g(t-kT) \quad (3-3)$$

Hierbij is aangenomen dat het element reageert op de hoogte van het signaal op de bemonsteringstijdstippen. Deze veronderstelling is juist bij de gestelde voorwaarde aan de pulsbreedte.

- b. Elementen, zoals bijvoorbeeld RC filters die reageren op de *oppervlakken* van de aangeboden pulsen. De responsie op een puls is hier zowel qua vorm als qua hoogte van de pulsbreedte afhankelijk.

Is de pulsbreedte veel kleiner dan de kleinste voorkomende tijdskonstante in het systeem dan is *de vorm* van de responsie van het element op een puls onafhankelijk van variaties in τ , terwijl de hoogte van de responsie evenredig met de pulsoppervlakte, d.w.z. met τ , zal zijn.

De responsie van het element op een puls met hoogte $\frac{1}{\tau}$, breedte τ (dus oppervlakte 1), waarbij τ voldoende klein is wordt per definitie de eenheids-impulsresponsie $w(t)$ van het systeem genoemd; zie ook 3.7 deel I, Regeltechnische Monografieën. In fig. 3.10 is de responsie van een eerste orde systeem op een eenheidsimpuls en op een puls met breedte τ en hoogte $\frac{1}{\tau}$ weergegeven.

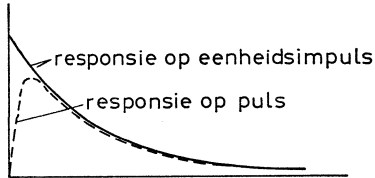


Fig. 3.10

In deze verwijzing vindt men ook behandeld dat de uitgang van een door de impulsresponsie $w(t)$ gekarakteriseerd systeem beschreven kan worden als de konvolutie integraal van $w(t)$ en de ingang van het element.

Zo zal de responsie $y(t)$ van een door $w(t)$ gekarakteriseerd element op het door (3-1) gegeven pulsgemoduleerd signaal $p_\tau(t)x(t)$ geschreven kunnen worden als:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t p_\tau(u)x(u)w(t-u)du = \sum_{k=0}^{k \leq t/T} \int_{kT}^{kT+\tau} x(u)w(t-u)du \quad (3-4)$$

De ondergrens van de sommatie wordt hier bepaald door $p_\tau(t)x(t) = 0$ voor $t < 0$.

Indien de breedte van de modulerende pulsen τ voldoende klein worden gekozen opdat $w(t)$ bij variatie van t over τ , als konstant beschouwd kan worden, dan is (3-4) te schrijven als:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{k \leq t/T} \left\{ \int_{kT}^{kT+\tau} x(u)du \right\} w(t-kT) \quad (3-5)$$

Is verder τ klein genoeg opdat $x(t)$ bij variatie van t over τ als konstant beschouwd kan worden, dan laat (3-5) zich vereenvoudigen tot:

$$y(t) = \tau \sum_{k=0}^{k \leq t/T} x(kT)w(t-kT) = \tau \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)w(t-kT) \quad (3-6)$$

De factor τ in deze formule speelt in de praktijk geen wezenlijke rol omdat de uitgang van het element altijd versterkt kan worden.

Het verschil tussen de uitdrukkingen (3-3) en (3-6) is dan ook niet van mathematische aard dan wel dat de responsiefuncties $g(t)$ en $w(t)$ hier technisch verschillend werkende systemen karakteriseren.

T.b.v. de mathematische behandeling van de verwerking van bemonsterde informatie, zullen in het vervolg (3-3) en (3-6) als één formule

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)h(t-kT); \quad (3-7)$$

worden geschreven, waarbij $h(t)$ zowel: een pulshoogteresponsie $g(t)$ als een met τ vermenigvuldigde impulsresponsie, $\tau w(t)$, kan voorstellen.

Met het doel om van (3-7) de Laplacetransformatie te kunnen opstellen wordt (3-7) geschreven als de konvolutie integraal.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)h(t-kT) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(u) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(u-kT)\} h(t-u) du \quad (3-8)$$

Hier stelt $\delta(u-kT)$ de functie van Dirac of deltafunctie voor met de eigenschappen:

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \infty \quad \text{voor } u = 0 \\ \delta(u) &= 0 \quad \text{voor } u \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{en } \int_0^{\varepsilon} \delta(u) du = 1 \text{ voor iedere } \varepsilon > 0.$$

Uit deze laatste eigenschap volgt:

$$\int_0^{\infty} x(u) \delta(u-kT) du = x(kT).$$

De konvolutie-integraal (3-8) kan worden geïnterpreteerd als de uitkomst van een filteroperatie waarbij eeningangssignaal $x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$ gefilterd wordt door een filter met een impulsresponsie gelijk aan $h(t)$.

Deze filteroperatie vindt in dit geval niet in werkelijkheid plaats, maar moet worden gezien als een hulpmiddel dat tot een goed antwoord leidt en dat het mogelijk maakt om de verwerking van bemonsterde informatie op gemakkelijke wijze m.b.v. de Laplace- en de z-transformatie te beschrijven. De 'filter input' $x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$, - het door de impulsrij $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$ gemoduleerde signaal $x(t)$ -, dient hierbij te worden opgevat als een symbolische interpretatie van het bemonsterde signaal $x(kT)$ voor $k=0, 1, 2, \dots$. Neemt men van de konvolutie integraal (3-8) de Laplacetransformatie dan vindt men:

$$\begin{aligned} L\{y(t)\} &= Y(p) = L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)h(t-kT)\right\} \\ &= L\left[\int_0^{\infty} \left\{x(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\tau-kT)\right\} h(t-\tau) d\tau\right] \\ &= L\left\{x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\right\} \cdot L\{h(t)\} \end{aligned} \quad (3-9)$$

De Laplacetransformatie van de konvolutie tussen twee functies is gelijk aan het produkt van de Laplacetransformatie der afzonderlijke functies (zie monografie I, hoofdstuk III).

De eerste term van (3-9): $L\{x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\}$ zal in het vervolg worden genoteerd als $X^*(p)$ zodat de Laplacetransformatie van (3-7) geschreven kan worden als: $Y(p) = X^*(p) H(p)$.

3.2.4 Uitdrukkingen voor het bemonsterde signaal

$X^*(p)$ kan op drie manieren worden uitgewerkt.

1. de direkte uitwerking:

$$\begin{aligned} X^*(p) &= L\{x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\} \\ &= \int_0^{\infty} x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT} \end{aligned} \quad (3-10)$$

2. uitwerking via een Fourierreeksontwikkeling.

De periodieke functie $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$ kan men schrijven als een Fourierreeks

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

en $\omega_s = 2\pi/T$.

Substitutie van deze reeks in $L\{x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\}$ geeft:

$$\begin{aligned} X^*(p) &= \int_0^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_s t} e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x(t) e^{-(p-jn\omega_s)t} dt \end{aligned}$$

of:

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p-jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p+jn\omega_s) \quad (3-11)$$

Indien b.v. gegeven is: $X(p) = \frac{1}{p+a}$

dan geldt:

$$\begin{aligned}
 X^*(p) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p+a+jn\omega_s} \\
 &= \left(\frac{1}{p+a} + \frac{1}{p+a+j\omega_s} + \frac{1}{p+a-j\omega_s} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat het polenbeeld van $X^*(p)$ een herhaling is van het polenbeeld van $X(p)$ (zie fig. 3.11).

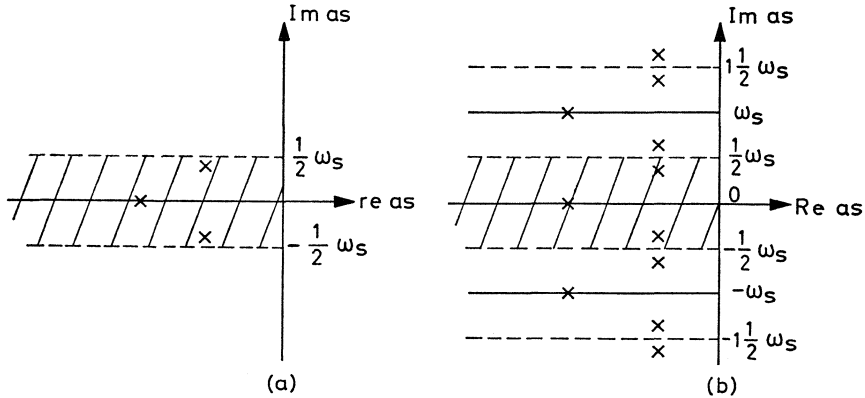


Fig. 3.11

Waar de nulpunten van $X(p)$ terecht komen is niet bekend, omdat deze bepaald worden door de teller van $X^*(p)$.

Dit maakt het werken in het p -vlak gekompliceerd. Het gearceerde gebied in fig. 3.11 b noemt men de primaire strook. Het polen- en nulpuntenbeeld van deze strook wordt herhaald in de zogenaamde secundaire stroken tussen $\frac{1}{2}j\omega_s$ en $1\frac{1}{2}j\omega_s$, $-\frac{1}{2}j\omega_s$ en $-1\frac{1}{2}j\omega_s$, enz.

Het frekwentiespektrum van een bemonsterd signaal kan afgeleid worden uit $X^*(p)$ door hierin $p = j\omega$ te stellen.

Indien hetingangssignaal een sinus is met frekwentie ω_1 ontstaan door de bemonstering complementaire frekwenties (hogere harmonischen) voor $\omega = \omega_1 \pm n\omega_s$, immers

$$X(j\omega) = \frac{\omega_1}{(j\omega)^2 + \omega_1^2} \quad \text{en} \quad X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\omega_1}{(j\omega + jn\omega_s)^2 + \omega_1^2} \right\}.$$

Indien de modulus van de frekwentiekarakteristiek van $X(j\omega)$ de vorm heeft zoals in fig. 3.12a is aangegeven, zal de moduluskarakteristiek van $X^*(j\omega)$ er uitzien als in fig. 3.12b getekend.

Door het bemonsteren ontstaan complementaire frekwentiebanden. Als de bemonsteringsfrekwentie ω_s hoger is dan tweemaal de hoogst voorkomende frekwentie ω_c van hetingangssignaal, bevat het uitgangssignaal hetzelfde

laagfrequent spectrum als hetingangssignaal en bovendien een oneindig aantal hoogfrequent spektra die $n\omega_s$ verschoven zijn. Met een filter dat een doorlaatkarakteristiek heeft zoals in fig. 3.12b gestippeld is aangegeven, is

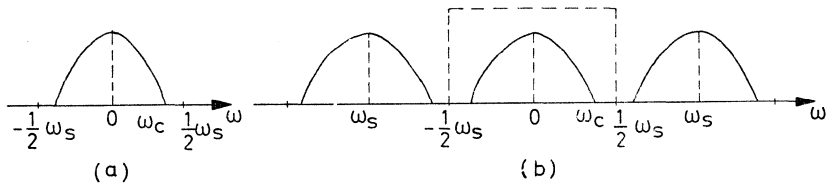


Fig. 3.12

het mogelijk het oorspronkelijke signaal terug te krijgen. Als de bemonsteringsfrequentie ω_s lager is dan tweemaal de hoogst voorkomende frequentie ω_c van hetingangssignaal (zie fig. 3.13), treedt er distorsie op in het uitgangssignaal.

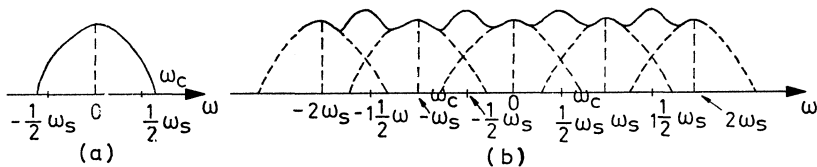


Fig. 3.13

Het is dan niet meer mogelijk door toepassing van een filter het oorspronkelijke signaal terug te krijgen. Als alleen de amplitude van $x(t)$ wordt gemeten dient de bemonsteringsfrequentie ω_s tenminste gelijk te zijn aan tweemaal de hoogst voorkomende frequentie aan de ingang (theorema van Shannon). In vele gevallen zal het frequentiespectrum van $x(t)$ niet eindig zijn, hoewel de modulus bij toenemende frequentie meestal wel zal afnemen. Dit houdt in, dat in feite niet aan de voorwaarden van het theorema van Shannon kan worden voldaan.

Zoals nog zal worden aangetoond zal de bemonsteringsfrequentie worden gekozen naar aanleiding van het laagdoorlaatkarakter van het systeem waaraan het bemonsterde signaal wordt toegevoerd. Bovendien wordt de bemonsteringsfrequentie gekozen afhankelijk van de eventueel optredende hoogfrequent ruis, die door het bemonsteringsproces tot laagfrequent ruis kan worden getransformeerd.

3. uitwerking volgens de methode der complexe konvolutie.

Bij deze uitwerking wordt verondersteld dat de Laplacetransformatie van $x(t)$ te ontbinden is in een teller- en noemerpolynoom.

$$\text{D.w.z. } L\{x(t)\} = X(p) = \frac{T(p)}{N(p)}.$$

Beschouw $X^*(p) = L\{x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\}$ als de Laplacetransformatie van het produkt van twee tijdfunkties. Deze Laplacetransformatie kan worden geschreven als de complexe konvolutie van de afzonderlijke Laplacetransformaties van de tijdfunkties.

Indien $f_1(t)$ en $f_2(t)$ twee tijdfunkties zijn met $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ geldt:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\xi) F_2(p-\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi j} \int_{c+j\infty}^{c-j\infty} F_2(\xi) F_1(p-\xi) d\xi$$

Stel $f_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$ en $f_2(t) = x(t)$.

Voor de Laplacetransformatie van $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$ vindt men:

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-pt} dt = 1 - e^{-pT} - e^{-2pT} - \dots = \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

Hiermee is het mogelijk $X^*(p) = L\{x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\}$ te schrijven als de complexe konvolutie-integraal (3-12):

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p-\xi) \frac{1}{1 - e^{-\xi T}} d\xi = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\xi) \frac{1}{1 - e^{-(p-\xi)T}} d\xi \quad (3-12)$$

Bij het berekenen van de konvolutie-integraal wordt de lijn $c-j\infty$ tot $c+j\infty$ eerst gesloten met een halfcirkel met straal oneindig, waardoor een contour-

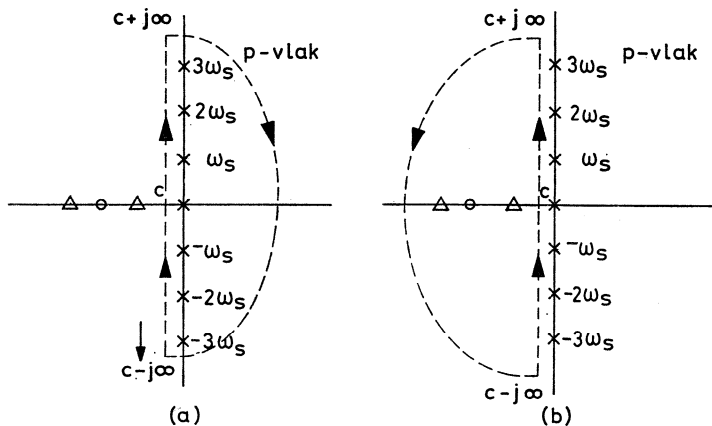


Fig. 3.14

integraal ontstaat. Hierna wordt de residustelling van Cauchy toegepast, die stelt dat de waarde van de kringintegraal gelijk is aan $2\pi j$ maal de som van de residuen van de singulariteiten die door de kringintegraal omsloten worden.

Indien de bijdrage tot de kringintegraal van de halve cirkel nul is, geldt dat de konvolutie-integraal gelijk is aan de som van de residuen van de singulariteiten die links of rechts van de lijn $c-j\infty$, $c+j\infty$ liggen.

Indien de singulariteiten $p = n\omega_s$ met $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2$ van $\frac{1}{1-e^{-pT}}$ omsloten worden (zie fig. 3.14a) ontstaat de som:

$$X^*(p) = L\{x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p+jn\omega_s).$$

Deze vorm is reeds gevonden in (3-11).

Indien de singulariteiten van $X(p) = \frac{T(p)}{N(p)}$ omsloten worden (zie fig. 3.14b) ontstaat de som:

$$X^*(p) = L\{x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\} = \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N^1(\xi_n)} \frac{1}{1-e^{-(p-\xi_n)T}} \quad (3-13)$$

waarin ξ_n voor $n=1, 2 \dots k$ de polen van $X(\xi)$ zijn en $N^1(\xi_n) = \left. \frac{dN(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_n}$.

De vorm (3-13) geldt slechts indien de polen van $X(\xi)$ enkelvoudig zijn. Het aantal polen moet minstens twee groter zijn dan het aantal nulpunten, om de bijdrage van de halve cirkel met oneindig grote straal nul te maken. Indien het aantal polen slechts één groter is dan het aantal nulpunten, zal er een diskontinuiteit optreden in het signaal $x(t)$ op $t=0$.

Er moet dan worden afgesproken welke signaalwaarde wordt meegenomen, de waarde van het signaal op $t=0^+$ of op $t=0^-$.

Per definitie wordt de signaalwaarde op $t=0^+$ genomen. Alleen de formule:

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p+jn\omega_s)$$

dient dan gewijzigd te worden in

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p+jn\omega_s) + \frac{1}{2}x(0).$$

De formules

$$X^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT) e^{-pkT} \quad (3-14)$$

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p+jn\omega_s) + \frac{1}{2}x(0) \quad (3-15)$$

$$X^*(p) = \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N^1(\xi_n)} \frac{1}{1-e^{-(p-\xi_n)T}} \quad (3-16)$$

zijn identiek.

Formule (3-14) is goed bruikbaar indien in het tijddomein gewerkt wordt.

Het is in vele gevallen mogelijk in $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-pkT}$ een meetkundige reeks te herkennen zodat een gesloten uitdrukking gevonden kan worden. Formule (3-15) geeft het verband met het frekwentiedomein weer (substitutie van $p = j\omega$).

Het is moeilijk een gesloten uitdrukking voor deze vorm te vinden. Formule (3-16) geeft het verband met het p -domein het meest direkt weer.

De formule is reeds een gesloten uitdrukking.

Voorbeeld 3.1:

$X(p) = \frac{1}{p+a}$; $x(t) = e^{-at}$. Bepaal $X^*(p)$ met behulp van de formules

(3-14), (3-15) en (3-16).

$$\begin{aligned} 1. X^*(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-npT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-npT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT(a+p)} \\ &= 1 + e^{-aT} e^{-pT} + e^{-2aT} e^{-2pT} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-pT}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. X^*(p) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p+jn\omega_s) + \frac{1}{2}x(0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p+jn\omega_s+a} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{T} \left[\frac{1}{p+a} + \frac{2(p+a)}{(p+a)^2 + \omega_s^2} + \frac{2(p+a)}{(p+a)^2 + 4\omega_s^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\text{Er geldt: } \pi \coth \pi x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+2^2} + \frac{2x}{x^2+3^2} + \dots$$

Neem voor x : $x = \frac{p+a}{\omega_s}$ dan geldt:

$$\pi \coth \pi \frac{(p+a)}{\omega_s} = \frac{\omega_s}{p+a} + \frac{\frac{2(p+a)}{\omega_s}}{\frac{(p+a)^2}{\omega_s^2} + 1} + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_s}{p+a} + \frac{2\omega_s(p+a)}{(p+a)^2 + \omega_s^2} + \frac{2\omega_s(p+a)}{(p+a)^2 + 2^2\omega_s^2} + \dots \\
&= \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{p+a} + \frac{2(p+a)}{(p+a)^2 + \omega_s^2} + \dots \right]
\end{aligned}$$

of

$$\frac{1}{2\pi} \left(\pi \coth \pi \frac{p+a}{\omega_s} \right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p+a+jn\omega_s}$$

Hieruit volgt:

$$X^*(p) = \frac{1}{2} \coth \frac{(p+a)T}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Er geldt tevens: } \coth \frac{(p+a)T}{2} = \frac{e^{\frac{(p+a)T}{2}} + e^{-\frac{(p+a)T}{2}}}{e^{\frac{(p+a)T}{2}} - e^{-\frac{(p+a)T}{2}}}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
X^*(p) &= \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{(p+a)T}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{(p+a)T}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{(p+a)T}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{(p+a)T}{2}}}{e^{\frac{(p+a)T}{2}} - e^{-\frac{(p+a)T}{2}}} \\
&= \frac{e^{\frac{(p+a)T}{2}}}{e^{\frac{(p+a)T}{2}} - e^{-\frac{(p+a)T}{2}}} = \frac{1}{1 - e^{-(p+a)T}}
\end{aligned}$$

$$3. X^*(p) = \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{\xi_n T} e^{-pT}}$$

In dit geval geldt: $T = 1$, $N(\xi) = \xi + a$, $N' = 1$, $k = 1$ en $\xi_1 = -a$, zodat:

$$X^*(p) = \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-pT}}.$$

Deze uitdrukkingen wijzen erop dat het niet verstandig is in het p -domein te werken indien signaalbemonstering plaatsvindt. De faktor e^{-pT} die in deze formules voorkomt, zal vervangen worden door de faktor z^{-1} door toepassing van de z -transformatie. Hierop wordt teruggekomen bij het invoeren van de z -transformatie (hoofdstuk V).

3.3 REKONSTRUKTIE VAN SIGNALLEN

Indien het signaal $x^*(t)$ wordt vergeleken met het signaal $x(t)$ is het duidelijk dat door het bemonsteren informatie verloren gaat als niet speciale maatregelen getroffen worden. Eveneens blijkt bij vergelijking in het frekwentiedomein het ontstaan van hogere harmonischen bij het bemonsterde signaal. Uit het voorgaande blijkt dat er behoefte is aan een zekere rekonstruktie van het signaal om de volgende redenen.

- a. Het korte pulsvormige signaal $x^*(t)$ dat zou optreden aan de ingang van het continue systeem, heeft in de meeste gevallen te weinig energie om een voldoende responsie te geven, tenzij dit signaal aanzienlijk versterkt zou worden. Het is daarom aan te raden de puls te verbreden over de gehele bemonsteringsperiode waarbij eventueel de amplitude van deze verbrede puls nog gedurende de bemonsteringsperiode kan worden aangepast door een extrapolatieproces (zie paragraaf 3.5).
- b. De hogere harmonischen die ontstaan kunnen aanleiding geven tot verzadiging en slijtage effecten. Weliswaar worden de hogere harmonischen gedempt door het laagdoorlaatkarakter van de meeste continue systemen waaraan het bemonsterde signaal wordt toegevoerd maar ergens in het systeem kan een opslingering optreden in een frekwentiegebied waarin ook de hogere harmonischen voorkomen. Hierdoor kan een uitsturing ontstaan (verschuiven werkpunt) van versterkers en extra slijtage in b.v. een tandwieltrain optreden. Er blijft dus in de meeste gevallen behoefte aan een filtering van de hogere harmonischen die door het bemonsteringsproces ontstaan voordat het signaal aan het continue systeem wordt toegevoerd.
- c. Door de bemonstering wordt slechts informatie over het signaal $x(t)$ verkregen op de bemonsteringstijdstippen $t = 0, T, 2T, \dots$. Alle informatie tussen deze tijdstippen gaat verloren, tenzij het signaal wordt gerekonstrueerd. Dit kan gebeuren met een zogenaamde extrapolator of houdschakeling die het oorspronkelijke signaal $x(t)$ volgens een bepaald rekenproces probeert te benaderen uit de bemonsterde signaalwaarden. Het $x^*(t)$ signaal wordt als het ware weer continu gemaakt. Op de bemonsteringstijdstippen kunnen diskontinue overgangen optreden.

In systemen waarin een rekenmachine is opgenomen in de regelkring verzorgd de DA omzetter of de houdversterker deze functie.

Aan de ingangszijde van de rekenmachine is geen signaalrekonstruktie nodig. Indien de bemonsteringsfrequentie van het te meten signaal echter hoger wordt gekozen dan van de DA omzetter is een filterwerking van het meetsignaal mogelijk in de rekenmachine (zie hoofdstuk XI).

3.3.1 Filters

Wordt begonnen met de eis ten aanzien van het frequentiespektrum van $x^*(t)$ dan lijkt het in eerste instantie het gunstigst een filter met rechthoekige doorlaatkarakteristiek te kiezen ('ideaal filter') (zie fig. 3.15).

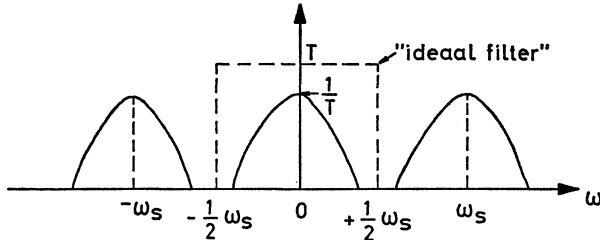


Fig. 3.15

Het is fysisch niet mogelijk een dergelijk filter te maken. De inverse transformatie naar het tijddomein van een ideaal filter geeft de volgende impulsresponsie van het filter (zie fig. 3.16).

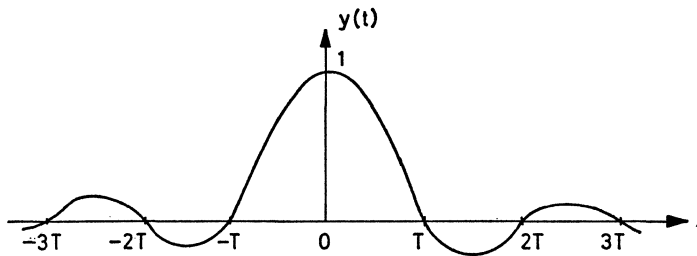


Fig. 3.16

$$y(t) = \frac{\sin \frac{1}{2} \omega_s t}{\frac{1}{2} \omega_s t} = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi t}{T}} \quad (3-14)$$

De uitgang $y(t)$ dient dus al een waarde te hebben voordat de ingang aanwezig is, hetgeen natuurlijk fysisch onmogelijk is.

Wanneer echter een dode tijd gelijk aan enkele malen de bemonsteringsperiode aan het filter wordt toegevoegd, wordt de responsie van fig. 3.16 naar rechts verschoven. Het zou dan wel bij goede benadering mogelijk zijn het ingangssignaal te reconstrueren, zij het dan met een zekere tijdvertraging, gelijk aan de ingestelde dode tijd.

Deze dode tijd moet echter betrekkelijk groot zijn, waardoor een grote

fasedraaiing ontstaat. Voor toepassing in een teruggekoppeld systeem betekent dit een gevaar voor de stabiliteit.

De rekonstruktie tengevolge van het ideale filter is weergegeven in fig. 3.17. Op elk moment worden oneindig veel responsies van de vorm van fig. 3.16 en met een hoogte die wordt bepaald door de signaalwaarden op de bemonsteringstijdstippen bij elkaar opgeteld. Hierdoor wordt het oorspronkelijke signaal volledig gereconstrueerd indien de maximale frekwentie van hetingangssignaal lager is dan $\frac{\omega_s}{2}$.

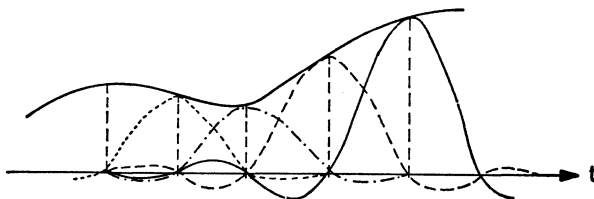


Fig. 3.17

Een eenvoudige rekonstruktie is een rekonstruktie met rechte lijnstukken. Hierbij is de impulsresponsie van het filter weergegeven in fig. 3.18.

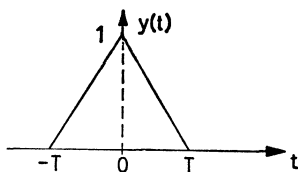


Fig. 3.18

$$Y(p) = \frac{e^{pT} - 2 + e^{-pT}}{p^2 T} = \frac{(e^{\frac{1}{2}pT} - e^{-\frac{1}{2}pT})^2}{p^2 T} \quad (3-15)$$

De frekwentiekarakteristiek van dit filter (zie fig. 3.19) volgt hieruit door $p = j\omega$ te stellen.

$$Y(j\omega) = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} \omega T}{\omega^2 T} = T \frac{(\sin \frac{1}{2} \omega T)^2}{(\frac{1}{2} \omega T)^2} \quad (3-16)$$

Met behulp van een dergelijke filter is het mogelijk een rekonstruktie van het signaal te verkrijgen zoals in fig. 3.20 is aangegeven. Op elk moment worden twee responsies van de vorm van fig. 3.18 bij elkaar opgesteld. De hoogte van deze responsie wordt bepaald door de signaalwaarden op de bemonsteringstijdstippen. Op de bemonsteringstijdstippen zelf heeft slechts één responsie een waarde.

Het signaal wordt met behulp van rechte lijnstukken benaderd. Ook hierbij is reeds een uitgang vereist vóór de ingang aan het systeem is toegevoerd. Door een dode tijd van T sec. toe te voegen, is realisatie mogelijk, maar ook hierdoor wordt tevens een fasedraaiing geïntroduceerd, die echter minder is

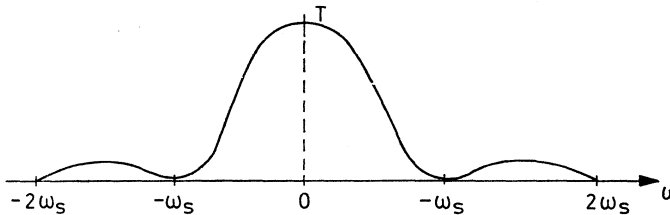


Fig. 3.19

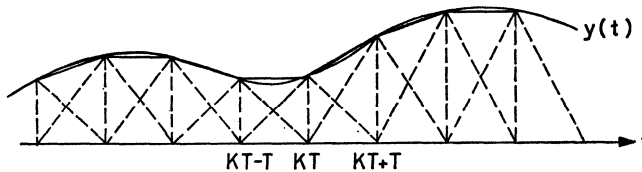


Fig. 3.20

dan in het geval van een ideaal filter. Steeds is aangenomen dat $X(j\omega)$ een eindig frekwentiespektrum heeft, wat meestal niet het geval is, zodat zelfs bij een ideaal filter altijd nog een zekere rimpel (dit is het verschil tussen het werkelijke signaal $x(t)$ en het gerekonstrueerde signaal) overblijft. De eisen die voor de rekonstruktie van het signaal in het frekwentiedomein worden gesteld, blijken sterk te kunnen worden afgezwakt, ook al omdat het continue systeem zelf voor de nodige filterwerking zal zorgen.

3.3.2 Houdschakelingen

In het tijddomein is $x(t)$ slechts bekend op de tijdstippen $t=0, T, 2T, \dots nT$. Na het tijdstip kT tot het tijdstip $(k+1)T$ wordt geen nieuwe informatie over $x(t)$ verkregen. De vorm van het signaal $x(t)$ tussen de bemonsteringstijden kan met een extrapolatieproces worden benaderd, er ontstaat een signaal $x_h(t)$. Bij een kontinuu signaal kan $x(t)$ voor $kT \leq t < (k+1)T$ berekend worden uit een Taylorreeksontwikkeling:

$$x(t) = x(kT) + x^{(1)}(kT)(t-kT) + \frac{x^{(2)}(kT)}{2!}(t-kT)^2 + \dots \quad (3-17)$$

waarin

$$x^{(n)}(kT) = \left. \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right|_{t=nT}$$

De differentiaalquotienten $x^{(n)}(kT)$ zijn niet bekend. Wel kan een benadering worden gevonden voor $x^{(1)}(kT)$, $x^{(2)}(kT)$, enz. door gebruik te maken van de kennis van de voorgaande waarden van $x(t)$.

De eenvoudigste benaderingen zijn (zie ook hoofdstuk IV):

$$x^{(1)}(kT) = \frac{x(kT) - x(kT-T)}{T} = \frac{\nabla x(kT)}{T}$$

$$\begin{aligned} x^{(2)}(kT) &= \frac{x^{(1)}(kT) - x^{(1)}(kT-T)}{T} \\ &= \frac{x(kT) - 2x(kT-T) + x(kT-2T)}{T^2} = \frac{\nabla^2 x(kT)}{T^2}, \end{aligned}$$

zodat $x(t)$ als volgt beschreven kan worden:

$$\begin{aligned} x_h(t) &= x(kT) + \frac{x(kT) - x(kT-T)}{T}(t-kT) + \\ &\quad + \left[\frac{x(kT) - 2x(kT-T) + x(kT-2T)}{T^2} \right] \frac{(t-kT)^2}{2!} + \dots \\ &= x(kT) + \nabla x(kT) \cdot \frac{(t-kT)}{T} + \nabla^2 x(kT) \cdot \frac{(t-kT)^2}{2! T^2} + \dots \quad (3-18) \end{aligned}$$

Indien een extrapolatieproces rekening houdt met $m+1$ waarden van $x(t)$ op de bemonsteringstijdstippen, spreekt men van een m^e orde houdschakeling. De meest voorkomende houdschakeling is de nulde orde houdschakeling, waarin $x_h(t) = x(kT)$ voor $kT \leq t < (k+1)T$. Verder vindt wel toepassing de eerste orde houdschakeling waarin

$$x_h(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x(kT-T)}{T}(t-kT)$$

voor $kT \leq t < (k+1)T$.

In eerste instantie lijkt het gunstiger een houdschakeling te kiezen van zo hoog mogelijke orde. Behalve dat de praktische uitvoering van een hogere orde houdschakeling een uitgebreide apparatuur vergt, zal de fasedraaiing van een dergelijke houdschakeling in een teruggekoppeld systeem sneller tot instabiliteit van de regelkring leiden. Een groot voordeel van houdschakelingen is dat het gekonstrueerde signaal $x_h(t)$ bij elke bemonstering gekorrigeerd wordt en de juiste waarde van dat moment aanneemt. Er treedt dus geen cumulatie van fouten op.

3.3.2.1 Nulde orde houdschakeling

De werking van deze houdschakeling wordt beschreven door de vergelijking:

$$x_h(t) = x(kT) \text{ voor } kT \leq t < (k+1)T \quad (3-19)$$

Deze bewerking wordt aangegeven in fig. 3.21.

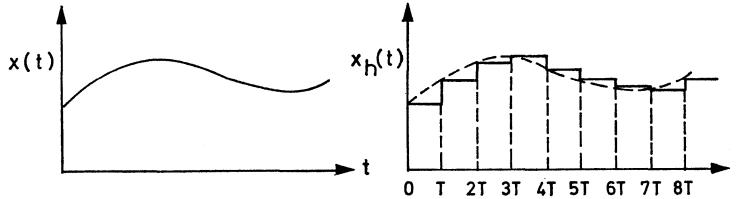


Fig. 3.21

De overdrachtsfunctie $G_{ho}(p)$ van de nulde orde houdschakeling wordt gevonden uit de responsie op een eenheidspuls. Indien deze aan de nulde orde houdschakeling op $t=0$ wordt toegevoerd, ontstaat een uitgang $x_h(t)$ die in fig. 3.22 is weergegeven.

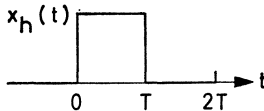


Fig. 3.22

$x_h(t) = U(t) - U(t-T)$ waarin $U(t)$ de eenheidsstapfunctie is.

$$G_{ho}(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT}}{p} = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \quad (3-20)$$

De frekwentiekarakteristiek (zie fig. 3.23) wordt gevonden door $p = j\omega$ in te vullen.

$$\begin{aligned} G_{ho}(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}j\omega T} (e^{\frac{1}{2}j\omega T} - e^{-\frac{1}{2}j\omega T})}{2j\omega} \\ &= \frac{T \sin \frac{1}{2}\omega T}{\frac{1}{2}\omega T} e^{-\frac{1}{2}j\omega T} \end{aligned} \quad (3-21)$$

voor $0 \leq \omega \leq \omega_s$ geldt:

$$|G_{ho}| = \frac{\sin \frac{1}{2}\omega T}{\frac{1}{2}\omega T} \quad \text{en} \quad \arg \{G_{ho}\} = -\frac{1}{2}\omega T$$

Deze frekwentiekarakteristiek wijkt sterk af van de frekwentiekarakteristiek van het 'ideale' filter dat gestippeld is aangegeven in fig. 3.23. Hierdoor is het niet mogelijk de bemonsteringsfrequentie gelijk te nemen aan het theoretische minimum van $\omega_s = 2\omega_c$ zoals blijkt uit fig. 3.24.

Bij een hogere bemonsteringsfrequentie wordt de filterwerking beter, zie fig. 3.25.

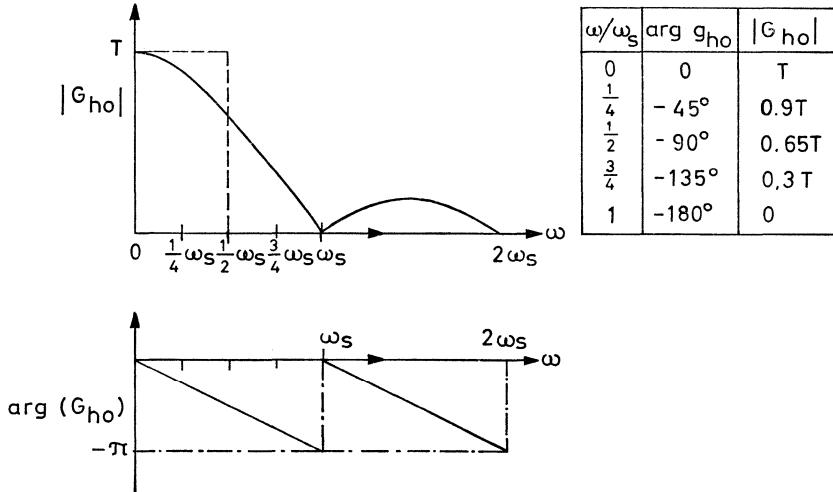


Fig. 3.23

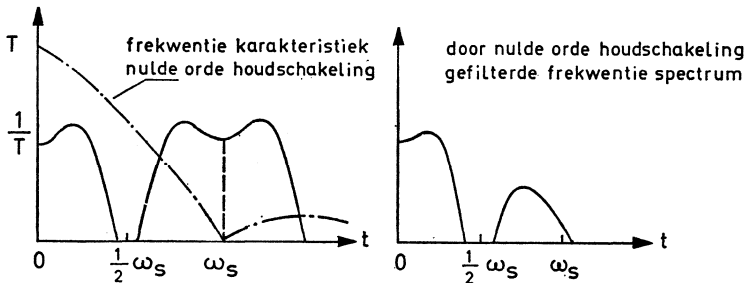


Fig. 3.24

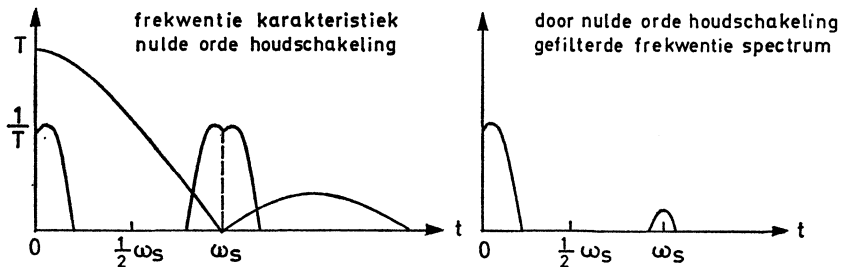


Fig. 3.25

Enkele opmerkingen over de nulde orde houdschakeling die van belang zijn in verband met het voorgaande zijn:

1. Deze houdschakeling is simpel van vorm en uitvoering. Het signaal wordt vastgehouden totdat een nieuwe waarde van het signaal, afkomstig van een volgende bemonstering, wordt aangeboden.
2. Een continu systeem waarin deze houdschakeling is opgenomen is minder gevoelig voor de pulsbreedte van het signaal $x^*(t)$ (zie fig. 3.26).

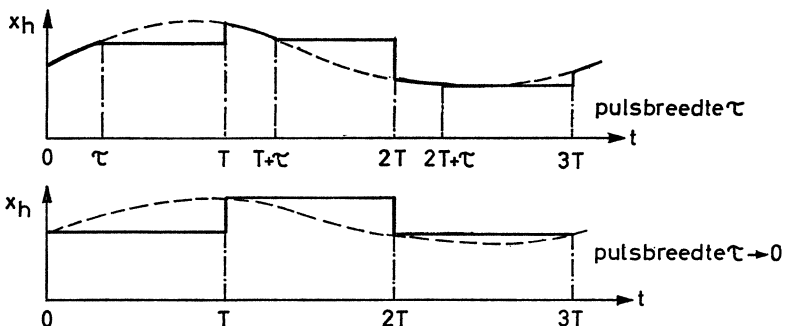


Fig. 3.26

3. Een konstant signaal wordt perfect gerekonstrueerd door een nulde orde houdschakeling, een eenparig met de tijd toenemend signaal wordt volgens een trapfunctie gevolgd (zie fig. 3.27).

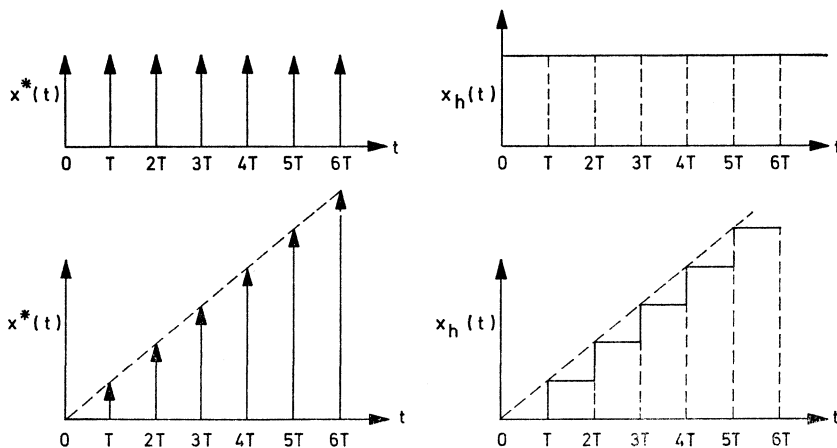


Fig. 3.27

De functie van een nulde orde houdschakeling is schematisch weergegeven in fig. 3.28.

Een geschematiseerde praktische uitvoering is de volgende (fig. 3.29).

De functie van de schakelaar wordt vertolkt door de FET-transistor die gedurende een korte tijd hetingangssignaal geleid.

Deingangsimpedantie van de schakeling is zeer hoog als de FET niet geleid. De operational amplifier werkt in deze uitvoering als een emittervolger

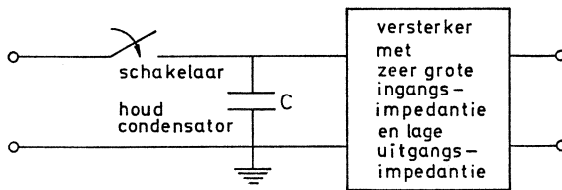


Fig. 3.28

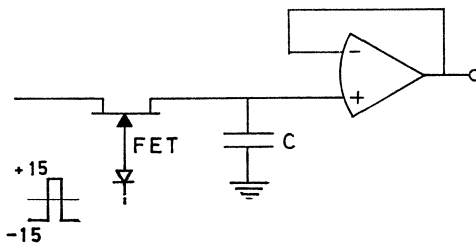


Fig. 3.29

en heeft een zeer hogeingangsimpedantie en een lage uitgangsimpedantie. Indien $C = 0,001 \mu\text{F}$ en de weerstand van de FET $R = 100 \Omega$ is in geleidende toestand, is de tijdconstante die geldt voor het opladen van de condensator: $\tau = RC = 10^{-7}$ sec.

Een andere mogelijkheid is de volgende (fig. 3.30).

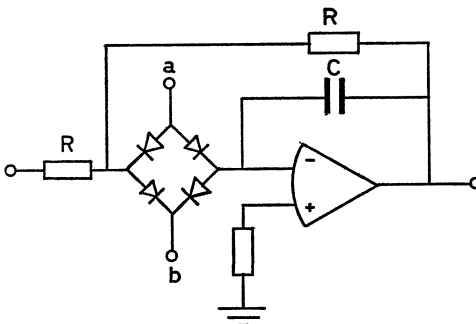


Fig. 3.30

De diodebrug vertolkt de functie van een schakelaar en geleid al dan niet afhankelijk van de spanning die over a en b wordt gezet.

In geleidende toestand wordt C opgeladen. Indien $R = 10 \text{ k}\Omega$ en $C = 0,001 \mu\text{F}$ is de tijdconstante die geldt voor het opladen van de condensator:

$\tau = RC = 10^{-5}$ sec. De uitvoering volgens fig. 3.29 laat dus een hogere bemonsteringsfrequentie toe.

3.3.2.2 De eerste orde houdschakeling

De werking van deze houdschakeling wordt beschreven door de vergelijking

$$x_h(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x(kT-T)}{T}(t-kT) \quad (3-22)$$

voor $kT \leq t < (k+1)T$.

Deze bewerking wordt aangegeven in fig. 3.31.

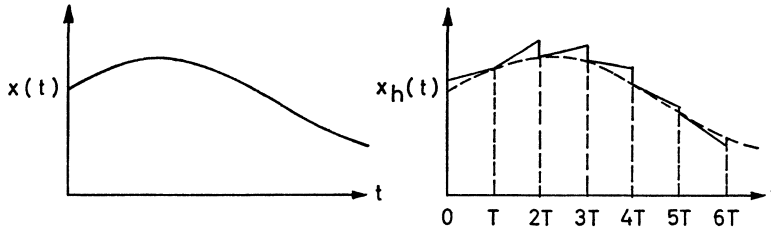


Fig. 3.31

De overdrachtsfunctie $G_{h1}(p)$ van de eerste orde houdschakeling wordt gevonden door een eenheidspuls ten tijde $t = 0$ op de ingang van de schakeling te zetten. De uitgang $g_{h1}(t) = x_h(t)$ is in fig. 3.32 weergegeven.

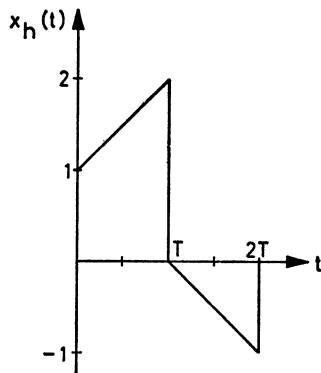


Fig. 3.32

De totale responsie luidt:

$$g_{h1}(t) = U(t) + \frac{t}{T} U(t) - 2U(t-T) - \frac{2(t-T)}{T} U(t-T) + \\ + \frac{(t-2T)}{T} U(t-2T) + U(t-2T)$$

zodat

$$G_{h1}(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 T} - \frac{2e^{-pT}}{p} - \frac{2e^{-pT}}{p^2 T} + \frac{e^{-2pT}}{p^2 T} + \frac{e^{-2pT}}{p}$$

$$= \frac{1}{p} (1 - e^{-pT})^2 + \frac{1}{p^2 T} (1 - e^{-pT})^2 = \frac{pT+1}{T} \{G_{h0}(p)\}^2. \quad (3-23)$$

De frekwentiekarakteristiek wordt gevonden door $p = j\omega$ in te vullen.

$$G_{h1}(j\omega) = \{G_{h0}(j\omega)\}^2 \frac{j\omega T + 1}{T} \quad (3-24)$$

voor $0 < \omega < \omega_s$ geldt

$$|G_{h1}| = |G_{h0}|^2 \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{T}$$

$\arg. \{G_{h1}\} = -\omega T + \text{bgtg}(\omega T)$ (zie fig. 3.33).

In deze figuur zijn zowel de frekwentiekarakteristieken van de nulde als van de eerste orde houdschakeling weergegeven.

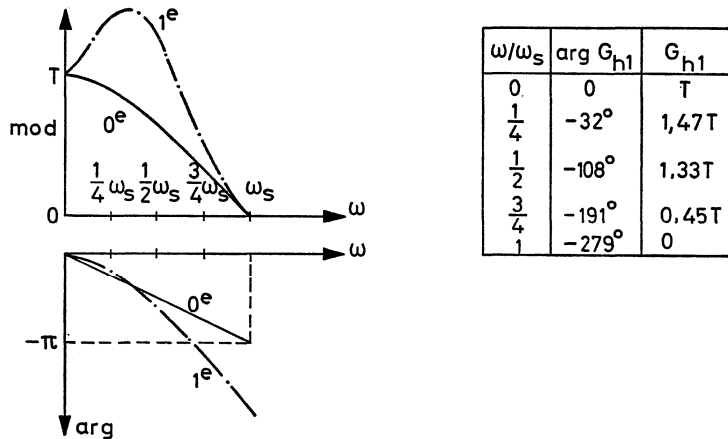


Fig. 3.33

De eerste orde houdschakeling wordt minder gebruikt dan de nulde orde houdschakeling. Er is een geheugen nodig om de vorige bemonstering te onthouden. Voorts is de fasedraaiing bij hogere frekwenties groter. Indien het ontwerp zeer kritisch is, wordt wel een eerste orde houdschakeling gebruikt. Een stapvormig ingangssignaal wordt eerst na één bemonsteringsperiode gevolgd (zie fig. 3.34). Een eenparig met de tijd toenemende functie wordt na één bemonsteringsperiode exakt gevolgd (zie fig. 3.34).

Soms wordt wel een zogenaamde fraktionele houdschakeling toegepast, die een werking heeft die tussen een nulde en eerste orde houdschakeling in ligt. Deze wordt verkregen door de tweede term van de vergelijking (3-22) te vermenigvuldigen met een factor m tussen 0 en 1. Voor $m = 0$ wordt de

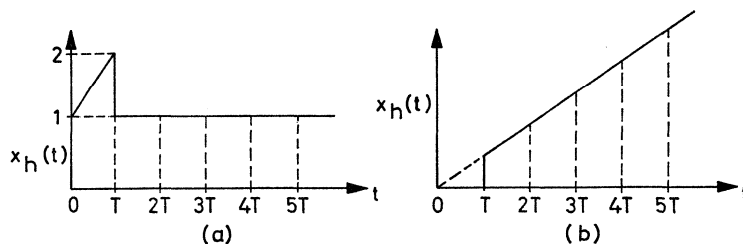


Fig. 3.34

nulde orde houdschakeling gevonden, voor $m = 1$ de eerste orde houdschakeling.

De equivalentie van een digitaal analoog omzetter of sample and hold en de mathematische beschrijving van een schakelaar gevolgd door een nulde orde houdschakeling kan op de volgende wijze aangetoond worden.

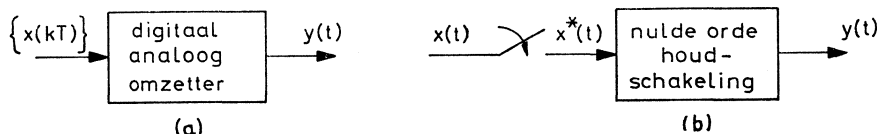


Fig. 3.35

In fig. 3.35a is de werking van een DA-omzetter aangegeven. Een rij getallen op de bemonsteringstijdstippen wordt omgezet in equivalente spanningen die gedurende T sec. worden vastgehouden.

Het uitgangssignaal $y(t)$ kan als volgt worden beschreven:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [U(t-kT) - U(t-kT-T)].$$

De Laplace-getransformeerde wordt:

$$Y(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \frac{e^{-pkT} - e^{-p(kT+T)}}{p} = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT}$$

In fig. 3.35b is de werking van de ideale schakelaar gevolgd door een nulde orde houdschakeling, weergegeven.

$$Y(p) = G_{h0}(p) \cdot X^*(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT}.$$

IV. Diskrete elementen

4.1 DIFFERENTIEVERGELIJKINGEN

In systemen met signaalbemonstering kunnen naast continue elementen waaraan continue of bemonsterde signalen worden toegevoerd, diskrete elementen voorkomen.

Het verband tussen de ingang en de uitgang van een diskreet element is slechts gedefinieerd op diskrete tijdstippen en kan beschreven worden met een differentievergelijking.

In de meeste gevallen is de informatie dan aanwezig in de vorm van getallen zodat binnen het diskrete element bewerkingen op getallen plaatsvinden. Voorbeelden van diskrete elementen in een regelkring zijn: digitale filters en digitale regelalgorithmen (rekenbewerkingen die op huidige en voorgaande informatie binnen een digitale rekenmachine worden uitgevoerd).

In het algemeen is men minder vertrouwd met differentievergelijkingen dan met differentiaalvergelijkingen. Differentievergelijkingen zullen daarom eerst geïntroduceerd worden, uitgaande van differentiaalvergelijkingen (voorbeeld 4.1).

Er zij echter op gewezen dat een equivalente behandeling van differentievergelijkingen en differentiaalvergelijkingen niet noodzakelijk is voor de beschrijving van diskrete elementen, omdat deze elementen inherent door een differentievergelijking worden beschreven.

Voorbeeld 4.1

De differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 y = \alpha x$$

bestaat uit termen die continu kunnen variëren. Door aan te nemen dat op diskrete tijdstippen informatie over de signalen x en y voorhanden is, kunnen $y(t)$ en $x(t)$ vervangen worden door $y(kT)$ en $x(kT)$. Voor $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{d^2 y}{dt^2}$ dient een benadering gevonden te worden, uitgaande van de kennis van $y(nT)$ met $n = \dots, k-2, k-1, k, k+1, k+2, \dots$. De meest simpele mogelijkheden zijn de volgende:

$$\begin{aligned}
1. \text{ Stel } \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} &= \frac{y(kT+T) - y(kT)}{T} = \frac{\Delta y(kT)}{T} \\
\text{en } \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=kT} &= \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} \right) = \frac{\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT+T} - \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT}}{T} \\
&= \frac{y(kT+2T) - 2y(kT+T) + y(kT)}{T^2} = \frac{\Delta^2 y(kT)}{T^2}.
\end{aligned}$$

Men noemt $\Delta y(kT)$ de eerste voorwaartse differentie, $\Delta^2 y(kT)$ de tweede voorwaartse differentie, enz.

Er ontstaat nu de volgende differentievergelijking (voorwaartse differentievorm):

$$\frac{\Delta^2 y(kT)}{T^2} + \beta_1 \frac{\Delta y(kT)}{T} + \beta_2 y(kT) = \alpha x(kT) \quad (4-1)$$

of de volgende differentievergelijking:

$$b_0 y(kT+2T) + b_1 y(kT+T) + b_2 y(kT) = a_2 x(kT) \quad (4-2)$$

met

$$b_0 = \frac{1}{T^2}$$

$$b_1 = -\frac{1}{T^2} (2 - \beta_1 T)$$

$$b_2 = \frac{1}{T^2} (1 - \beta_1 T + \beta_2 T^2)$$

$$a_2 = \alpha.$$

$$\begin{aligned}
2. \text{ Stel } \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} &= \frac{y(kT) - y(kT-T)}{T} = \frac{\nabla y(kT)}{T} \\
\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=kT} &= \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} \right) = \frac{\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} - \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT-T}}{T} \\
&= \frac{y(kT) - 2y(kT-T) + y(kT-2T)}{T^2} = \frac{\nabla^2 y(kT)}{T^2}.
\end{aligned}$$

Men noemt $\nabla y(kT)$ de eerste achterwaartse differentie, $\nabla^2 y(kT)$ de tweede achterwaartse differentie, enz. Er ontstaat nu een differentievergelijking in de achterwaartse differentievorm:

$$\frac{\nabla^2 y(kT)}{T^2} + \frac{\beta_1 \nabla y(kT)}{T} + \beta_2 y(kT) = \alpha x(kT) \quad (4-3)$$

of

$$b'_0 y(kT) + b'_1 y(kT-T) + b'_2 y(kT-2T) = a'_0 x(kT) \quad (4-4)$$

met

$$b'_0 = \frac{1}{T^2} (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2)$$

$$b'_1 = -\frac{1}{T^2} (2 + \beta_1 T)$$

$$b'_2 = \frac{1}{T^2}$$

$$a'_0 = \alpha.$$

Hieruit blijkt dat de beschrijvingswijze met Δ of ∇ de meeste gelijkenis vertoont met differentiaalvergelijkingen. Deze gelijkenis is van weinig betekenis indien het element inherent diskreet is. Hiervoor is de beschrijvingswijze (4-2) of (4-4) van veel meer belang.

In het vervolg zal als algemene vorm voor de differentievergelijking die een diskreet element beschrijft, worden gekozen:

$$\begin{aligned} b_0 y(kT) + b_1 y(kT-T) + \dots + b_n y(kT-nT) \\ = a_0 x(kT) + a_1 x(kT-T) + \dots + a_n x(kT-nT) \end{aligned} \quad (4-5)$$

Veelal wordt het argument T weggelaten, terwijl ook wel de volgende notatie in de literatuur wordt gebruikt:

$$b_0 y_k + b_1 y_{k-1} + \dots + b_n y_{k-n} = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + \dots + a_n x_{k-n} \quad (4-6)$$

In vele gevallen wordt de faktor $b_0 = 1$ gekozen. Hierdoor is het mogelijk de uitgang $y(kT)$ van het element te schrijven als de som van de huidige en voorgaande ingangsgrootheden en voorgaande uitgangsgrootheden:

$$\begin{aligned} y(kT) = a_0 x(kT) + a_1 x(kT-T) + \dots + a_n x(kT-nT) \\ - b_1 y(kT-T) - b_2 y(kT-2T) - \dots - b_n y(kT-nT) \end{aligned} \quad (4-7)$$

In verband met de fysische realiseerbaarheid mag b_0 niet gelijk zijn aan nul indien $a_0 \neq 0$. De uitgang zou anders anticiperen op de nog onbekende ingang. De orde van de differentievergelijking wordt bepaald door het verschil tussen het grootste en kleinste veelvoud van T in het argument van y , dus door $k - (k-n) = n$.

Tenslotte wordt nog gewezen op de volgende schrijfwijze van de differentievergelijking (4-8):

$$b_0 y(kT+nT) + b_1 y(kT+nT-T) + \dots + b_n y(kT) \\ = a_0 x(kT+nT) + a_1 x(kT+nT-T) + \dots + a_n x(kT). \quad (4-8)$$

Men kan (4-5) direkt oplossen voor $y(kT)$ met $k = 0, 1, 2, \dots$, indien men aanneemt dat $x(kT) = 0$ voor $k < 0$ en indien men de beginvoorwaarden $y(-1), y(-2T), \dots, y(-nT)$ kent. In de meeste gevallen zullen deze gelijk zijn aan nul (voorbeeld 4.2).

Het is ook mogelijk $y(kT+nT)$ op te lossen uit (4-8) voor $k = 0, 1, 2, \dots$ indien n beginvoorwaarden $y(0), y(T), \dots, y(nT-T)$ bekend zijn. Indien dit laatste niet het geval is, dienen deze beginvoorwaarden gegenereerd te worden uit het stel beginvoorwaarden $y(-1), y(-2), \dots, y(-nT)$ (zie voorbeeld 4.2). In het volgende hoofdstuk wordt hierop nader teruggekommen bij het toepassen van de verschuivingsregels.

Voorbeeld 4.2

$$y(kT) + b_1 y(kT-T) + b_2 y(kT-2T) = a_0 x(kT). \quad (4-9)$$

Neem aan $y(kT) = 0$ voor $k = -1, -2$, en $x(kT) = 0$ voor $k = -1, -2, -3, \dots$. Stel $x(0) = 1, x(kT) = 0$ voor $k = 1, 2, 3, \dots$. $y(kT)$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$ wordt opgelost uit:

$$y(kT) = -b_1 y(kT-T) - b_2 y(kT-2T) + a_0 x(kT).$$

Voor $k = 0$ geldt:

$$y(0) = a_0.$$

Voor $k = 1$ geldt:

$$y(T) = -b_1 y(0) + a_0 x(T) = -b_1 a_0.$$

Voor $k = 2$ geldt:

$$y(2T) = -b_1 y(T) - b_2 y(0) = b_1^2 a_0 - b_2 a_0, \quad \text{enz.}$$

Indien de differentievergelijking als volgt wordt geschreven:

$$y(kT+2T) + b_1 y(kT+T) + b_2 y(kT) = a_0 x(kT+2T) \quad (4-10)$$

wordt voor $k = 0$, $y(2T)$ gevonden als functie van $y(0)$, $y(T)$ en $x(2T)$.

$y(0)$ en $y(T)$ worden gevonden door $k = -2$ en $k = -1$ in te vullen in (4-10). Hieruit volgt $y(0) = a_0$ en $y(T) = -b_1 a_0$, waarna

$$y(2T) = -b_1(-a_0 b_1) - b_2 a_0 = b_1^2 a_0 - b_2 a_0, \quad \text{enz.}$$

De differentievergelijkingen zijn rekursief en kunnen op een eenvoudige iteratieve wijze worden opgelost.

Een andere wijze om een systeem te beschrijven is de beschrijving via de impulsresponsie.

Zoals reeds aangegeven in hoofdstuk III, paragraaf 3.2.3 kan voor een continu systeem waarvan de ingang wordt bemonsterd, de uitgang op diskrete tijdstippen bepaald worden uit:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^k x(nT) h(kT-nT) = \sum_{n=0}^k x(kT-nT) h(nT). \quad (4-11)$$

Bij diskrete elementen vindt meestal een normering plaats met $T = 1$, omdat in diskrete elementen de tijd niet expliciet als parameter voorkomt.

Hierdoor gaat (4-11) over in (4-12)

$$y(k) = \sum_{n=0}^k x(n) h(k-n) = \sum_{n=0}^k x(k-n) h(n). \quad (4-12)$$

Deze vergelijking geldt ook voor diskrete elementen, zoals nu aangetoond zal worden.

Bij continue systemen wordt gebruik gemaakt van impulsen, bij diskrete elementen kan gebruik gemaakt worden van zogenaamde Kronecker rijen met de eigenschap :

$$\delta_j(k) = 1 \text{ voor } k = j \text{ en } \delta_j(k) = 0 \text{ voor } k \neq j.$$

d.w.z. dat voor $\delta_0(k)$ de volgende getallenrij genoteerd kan worden: $\{1, 0, 0, 0, \dots\}$, voor $\delta_1(k)$ geldt: $\delta_1(k) = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$, enz.

De Kronecker rij $\delta_0(k)$ geeft een responsie $y(k)$ op het diskrete element voor $k = 0, 1, 2, \dots$

Er ontstaat een rij getallen aan de uitgang die vergelijkbaar is met de impulsresponsie van een continu systeem.

De Kronecker rij $\delta_1(k)$ geeft een responsie $y(k)$ die één verschoven is ten opzichte van de responsie op $\delta_0(k)$, d.w.z. er ontstaat nu de rij $h(k-1)$.

Men kan dit ook eenvoudig zien uit voorbeeld 4.2. De ingang wordt dan $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ en $x(k) = 0$ voor $k = 2, 3, 4, \dots$

Er volgt dan:

$$\begin{aligned} y(0) &= a_0 x(0) = 0 \\ y(1) &= -b_1 y(0) + a_0 x(1) = 0 + a_0 = a_0 \\ y(2) &= -b_1 y(1) - b_2 y(0) + a_0 x(2) = -b_1 a_0 \\ y(3) &= -b_1 y(2) - b_2 y(1) + a_0 x(3) = b_1^2 a_0 - b_2 a_0. \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Indien men een willekeurige ingangrij

$$x(k) = \{x(0) \delta_0(k) + x(1) \delta_1(k) + \dots\}$$

toevoert aan het systeem, ontstaat de volgende uitgangrij:

$$\begin{aligned}
 y(k) &= x(0)h(k) + x(1)h(k-1) + x(2)h(k-2) + \dots + x(k)h(0) \\
 &= \sum_{n=0}^k x(n)h(k-n) = \sum_{n=0}^k x(k-n)h(n).
 \end{aligned}$$

Deze beschrijfwijze van een diskreet element is niet rekursief. Indien men $y(m)$ wil berekenen, volgt $y(m)$ niet uit een beperkt aantal voorgaande waarden van $x(k)$ en $y(k)$ maar uit een in principe toenemend aantal waarden van $x(k)$ en $h(k)$. Dit aantal is slechts begrensd indien $h(k)$ en $x(k)$ voor $k > N$ nul worden (zie voorbeeld 4.4 en 4.5).

Voorbeeld 4.3

Gegeven een element met $h(k) = 1$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Er geldt dan de volgende niet-rekursieve betrekking:

$$y(k) = \sum_{n=0}^k x(n). \quad (4-13)$$

Het element is dus op te vatten als een sommatoren. Een rekursieve betrekking volgt hieruit door $y(k-1)$ af te trekken van $y(k)$:

$$y(k) - y(k-1) = \sum_{n=0}^k x(n) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) = x(k).$$

De sommatoren kan dus ook beschreven worden met de eerste orde differentievergelijking (4-14):

$$y(k) - y(k-1) = x(k). \quad (4-14)$$

Indien $x(k) = 1$ voor $k = 0, 1, 2, 3$, wordt voor $y(k)$ gevonden:

$$y(k) = \sum_{n=0}^k x(n) = (k+1)x(k) = k+1 \quad (\text{zie fig. 4.1}).$$

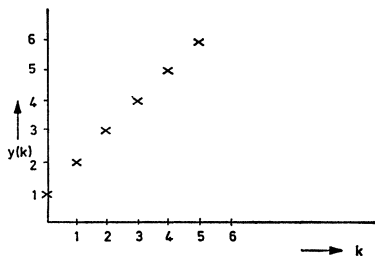


Fig. 4.1

Voorbeeld 4.4

Gegeven een element met $h(k) = (\frac{1}{2})^k$. De niet-rekursieve betrekking luidt:

$$y(k) = \sum_{n=0}^k (\frac{1}{2})^n x(k-n) = \sum_{n=0}^k (\frac{1}{2})^{k-n} x(n). \quad (4-15)$$

Het element is op te vatten als een filter dat de ingangsinformatie gewogen doorgeeft aan de uitgang, waarbij de nieuwste informatie met meer gewicht wordt meegenomen dan de andere informatie.

De 'stap' responsie van dit element wordt gevonden door als ingang te nemen:

$$x(k) = \delta_0(k) + \delta_1(k) + \dots = \{1, 1, 1, 1, \dots\}.$$

Hieruit volgt:

$$y(k) = \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left\{1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, \dots\right\}.$$

Voor $k \rightarrow \infty$ geldt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Deze responsie is met kruisjes weergegeven in fig. 4.2.

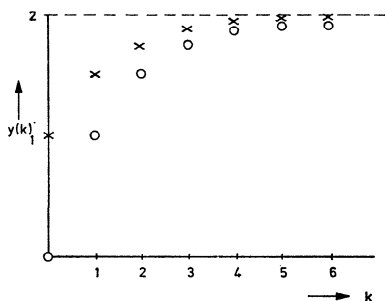


Fig. 4.2

Deze responsie lijkt erg veel op de stapresponsie van een continu eerste orde laagdoorlaatfilter met een gelijkstroomversterking 2. Er treedt echter een sprongvormige verandering op voor $t = 0$, die voor een continu eerste orde laagdoorlaatfilter alleen kan optreden bij een beginvoorwaarde ongelijk nul. Een equivalente responsie treedt op indien het diskrete element beschreven wordt door $h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ voor $k = 1, 2, 3, \dots$ en $h(k) = 0$ voor $k = 0, -1, -2, \dots$. Voor de 'stap' responsie wordt dan gevonden:

$$y(0) = h(0)x(0) = 0$$

$$y(k) = \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1-n} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

Hieruit volgt:

$$y(k) = \{0, 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\}.$$

Deze responsie is met nulletjes weergegeven in fig. 4.2.

De rekursieve betrekking kan als volgt worden afgeleid:

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n x(k-n) \\ &= x(k) + \frac{1}{2}x(k-1) + \frac{1}{4}x(k-2) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(k-1) &= \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n x(k-1-n) \\ &= x(k-1) + \frac{1}{2}x(k-2) + \dots \end{aligned}$$

Dus

$$\frac{1}{2}y(k-1) = \frac{1}{2}x(k-1) + \frac{1}{4}x(k-2) + \dots$$

Hieruit volgt:

$$y(k) - \frac{1}{2}y(k-1) = x(k). \quad (4-16)$$

Dit is een eerste orde differentievergelijking.

Teneinde het aantal berekeningen in een rekursieve betrekking te beperken, kan men vaak de rij $\{h(k)\}$ voor een bepaalde waarde van $k = N$ afbreken zodat ontstaat:

$$h(k) = \{h(0), h(1), h(2), \dots, h(N), 0, 0\}.$$

Voor $y(k)$ kan nu genoteerd worden:

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{n=0}^k h(n)x(k-n) \quad \text{voor } k \leq N \\ y(k) &= \sum_{n=0}^N h(n)x(k-n) \quad \text{voor } k > N. \end{aligned}$$

Voor de 'stap' responsie van voorbeeld 4.4 wordt nu gevonden voor $N=1, 2$ en 3 resp.:

$$N = 1: y(0) = 1, y(k) = \sum_{n=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1\frac{1}{2} \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots$$

$$N = 2: y(0) = 1, y(1) = 1\frac{1}{2}, y(k) = \sum_{n=0}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1\frac{3}{4} \quad \text{met } k = 2, 3, \dots$$

$$N = 3: y(0) = 1, y(1) = 1\frac{1}{2}, y(2) = 1\frac{3}{4} \text{ en } y(k) = \sum_{n=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1\frac{7}{8} \\ \text{met } k = 3, 4, 5, \dots$$

(zie fig. 4.3)

Het is ook mogelijk de frequentieresponsie van dit filter te bepalen:

Neem als ingangsrj

$$x(n) = e^{j\omega n}$$

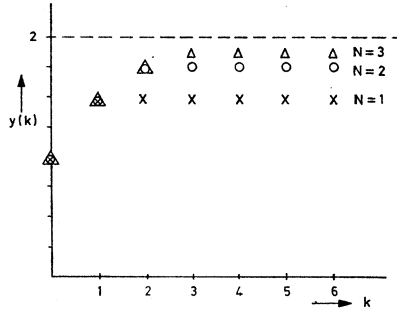


Fig. 4.3

Bepaal de responsie

$$y(k) = \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n x(k-n)$$

van het filter op het signaal $x(n)$:

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\omega(k-n)} = e^{j\omega k} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega T} + \frac{1}{4}e^{-2j\omega} + \dots\right) \\ &= e^{j\omega k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \end{aligned}$$

Voor $k \rightarrow \infty$ wordt verkregen (4-17)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} x(k). \quad (4-17)$$

Hierin is:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = H(j\omega) \quad (4-18)$$

de frekwentieresponsie van het eerste orde filter (zie fig. 4.4).

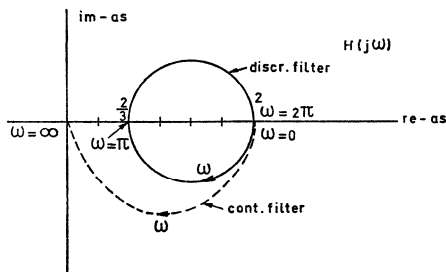


Fig. 4.4

In hoofdstuk VII wordt de frekwentieresponsiemethode nader behandeld. Hier zij vermeld het grote verschil tussen de frekwentieresponsies van een discreet en een continu eerste orde laagdoorlaatfilter.

De frekwentieresponsie van het continue filter doorloopt de frekwenties van 0 tot ∞ (gestippeld weergegeven). De frekwentiekarakteristiek van het digitale filter herhaalt zich voor de frekwentiegebieden 2π tot 4π , 4π tot 6π , enz. Alleen voor lage frekwenties is een goede overeenkomst mogelijk.

In dit voorbeeld is $T = 1$ gekozen.

De konvolutie van de twee getallenrijen $x(k-n)$ en $h(n)$ teneinde de getallenrij $y(k)$ te verkrijgen, wordt geïllustreerd door het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 4.5

Stel dat $h(n)$ en $x(n)$ worden gegeven door de volgende getallenrijen (zie fig. 4.5).

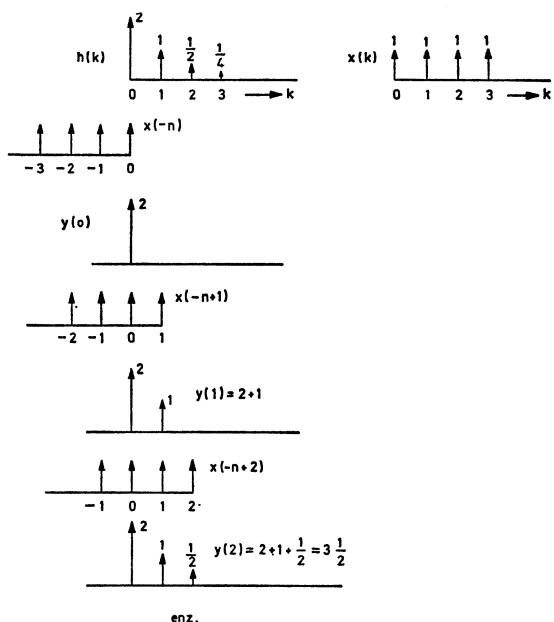


Fig. 4.5

$x(k-n)$ wordt gevonden door $x(n)$ te spiegelen t.o.v. $t = k$. Voor $k = 0, 1$ en 2 wordt $y(k)$ gevonden uit de konvoluties die in fig. 4.5 zijn aangegeven. Er ontstaat uiteindelijk de volgende uitgangsrj:

$$y(kT) = \{2, 3, 3\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, 1\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \dots\}.$$

Dit resultaat dat ontstaat door de onder elkaar gelegen waarden $h(n)$ en $x(k-n)$ met elkaar te vermenigvuldigen en op te tellen, kan ook worden verkregen door twee rijen getallen t.o.v. elkaar te verschuiven en de onder elkaar gelegen waarden met elkaar te vermenigvuldigen (zie fig. 4.6).

$y(0)$ wordt verkregen uit de eerste twee rijen, $y(1)$ uit de eerste en de derde rij, $y(2)$ uit de eerste en de vierde rij, enz.

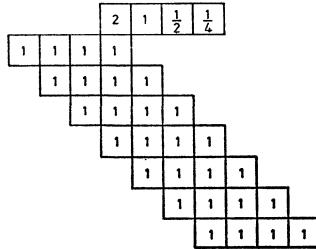


Fig. 4.6

$$\begin{aligned}
 h(n) & \\
 x(-n) & \quad y(0) = 2 \\
 x(1-n) & \quad y(1) = 1 + 2 = 3 \\
 x(2-n) & \quad y(2) = \frac{1}{2} + 1 + 2 = 3\frac{1}{2} \\
 x(3-n) & \quad y(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 = 3\frac{3}{4} \\
 x(4-n) & \quad y(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{3}{4} \\
 x(5-n) & \quad y(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\
 x(6-n) & \quad y(6) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

De niet-rekursieve betrekking, gekarakteriseerd door $h(k)$, is eenvoudig af te leiden uit de rekursieve betrekking, gekarakteriseerd door de differentievergelijking in $y(k)$ en $x(k)$. Het omgekeerde is echter veel moeilijker. Men dient dan veronderstellingen over de orde en de vorm van de differentievergelijking te maken.

Voorbeeld 4.6

Gegeven een diskreet element beschreven door

$$y(k) = \alpha y(k-1) + x(k). \quad (4-19)$$

De niet-rekursieve betrekking van $y(k)$ luidt:

$$y(k) = \sum_{n=0}^k h(n) x(k-n)$$

waarin $h(n)$ bepaald dient te worden.

Er geldt tevens:

$$y(k-1) = \sum_{n=0}^{k-1} h(n) x(k-1-n).$$

Dit ingevuld in (4-19) geeft

$$\sum_{n=0}^k h(n) x(k-n) = \alpha \sum_{n=0}^{k-1} h(n) x(k-1-n) + x(k).$$

Hieruit volgt

$$h(0) x(k) = x(k) \Rightarrow h(0) = 1$$

$$h(1) x(k-1) = \alpha h(0) x(k-1) \Rightarrow h(1) = \alpha h(0) = \alpha$$

$$h(2) x(k-2) = \alpha h(1) x(k-2) \Rightarrow h(2) = \alpha h(1) = \alpha^2$$

enz.

V. De z-transformatie

5.1 DEFINITIE VAN DE z-TRANSFORMATIE EN DE INVERSE z-TRANSFORMATIE

In de voorgaande hoofdstukken is aangegeven op welke wijze de signalen in een bemonsterd systeem mathematisch beschreven kunnen worden.

In hoofdstuk III zijn m.b.t. het bemonsterde signaal $x^*(t)$ (fig. 5.1) de volgende uitdrukkingen voor $X^*(p)$, de Laplace getransformeerde van $x^*(t)$, afgeleid:

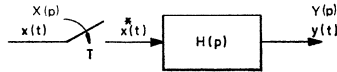


Fig. 5.1

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-npT} \quad (5-1)$$

$$X^*(p) = \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{\xi_n T} e^{-pT}} \quad (5-2)$$

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(p + jn\omega_s) \quad (5-3)$$

Deze uitdrukkingen zijn niet eenvoudig te hanteren. De analyse van stabiliteitseigenschappen en overgangverschijnselen in systemen waarin bemonsterde en continue signalen voorkomen, wordt hierdoor ernstig bemoeilijkt.

In dit hoofdstuk zal worden aangegeven hoe door een eenvoudige transformatie een gelijkvormige beschrijvingswijze wordt gevonden voor systemen met signaalbemonstering en continue systemen. Hierdoor zijn, met weliswaar kleine verschillen, de analyse en synthese methoden voor continue systemen ook geschikt te maken voor systemen met signaalbemonstering.

Deze transformatie, de *z-transformatie*, voert elk getransformeerd signaal $X^*(p)$ over in $X(z)$ volgens de definitie:

$$z = e^{pT} \quad \text{of} \quad p = \frac{1}{T} \ln z.$$

Aangezien geldt dat:

$$z^{-1} = e^{-pT}$$

en deze laatste vorm een verschuiving in het tijddomein ter grootte van de bemonsteringsperiode T voorstelt, wordt de z -operator ook wel *verschuivingsoperator* genoemd.

Zoals reeds aangegeven in hoofdstuk III, is voor (5-3) erg moeilijk een gesloten uitdrukking te vinden; deze uitdrukking zal slechts gebruikt worden voor een beschouwing in het frekwentiedomein.

Door de z -transformatie gaat (5-1) over in:

$$X^*(p) \Big|_{p=\frac{1}{T} \ln z} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}, \quad (5-4)$$

terwijl (5-2) overgaat in:

$$\begin{aligned} X^*(p) \Big|_{p=\frac{1}{T} \ln z} = X(z) &= \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{\xi_n T} z^{-1}} \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{z}{z - e^{\xi_n T}}. \end{aligned} \quad (5-5)$$

Hierin noemt men

$$X(z) = Z \{x^*(t)\} = L \{x^*(t)\} \Big|_{p=\frac{1}{T} \ln z} = X^*(p) \Big|_{p=\frac{1}{T} \ln z}$$

de z -transformatie van $x^*(t)$.

Er zal echter ook gesproken worden over $X(z)$ als de z -transformatie van $x(t)$. Hierbij wordt aangenomen dat $x(t)$ wordt bemonsterd op de tijdstippen $t = nT$ met $n = 0, 1, 2, \dots$. In het vervolg van dit hoofdstuk zal $x(t)$ steeds in deze zin worden gedefinieerd.

In vele gevallen zal het mogelijk zijn voor (5-4) een gesloten uitdrukking te vinden, waarbij voldaan dient te worden aan de convergentievoorwaarde van de oneindige som.

In hoofdstuk IV is aangegeven dat bij diskrete elementen bewerkingen op rijen getallen plaatsvinden.

Ook hierop kan de z -transformatie worden toegepast waarbij de rij van getallen $\{x(kT)\}$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$ als volgt per definitie getransformeerd wordt:

$$Z \{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z). \quad (5-6)$$

De z -transformatie is dus een universele transformatie die zowel kan worden toegepast op bemonsterde signalen als op rijen getallen. De overeenkomst

in beide beschrijfwijzen in het p -domein is reeds aangetoond in de voorgaande hoofdstukken.

In dit hoofdstuk zullen vele voorbeelden worden behandeld van het gebruik van de z -transformatie, zowel voor bemonsterde signalen $x^*(t)$, als voor bemonsterde elementen met overdrachtsfunctie $H^*(p)$ (de Laplace getransformeerde impulsresponsie van een dergelijk element, zie fig. 5.2).

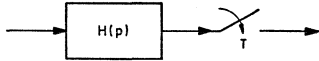


Fig. 5.2

Bovendien zal in een aantal voorbeelden de z -transformatie van de in- of uitgangrij van een diskreet element, of de z -transformatie van een diskreet element worden bepaald.

Voorbeeld 5.1

Bepaal de z -transformatie van een stapfunctie die bemonsterd wordt: $x(t) = U(t)$ met $U(t) = 1$ voor $t \geq 0$ en $U(t) = 0$ voor $t < 0$. Hieruit volgt $x(nT) = 1$, dus:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Voorbeeld 5.2

Bepaal de z -transformatie van de overdrachtsfunctie $H(p) = \frac{1}{p+a}$. Maak gebruik van (5-5), $T(\xi) = 1$, $N(\xi) = \xi + a$, $\xi_1 = -a$ en $N'(\xi) = 1$, dus :

$$\sum_{n=0}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{1}{1-e^{\xi_n T} z^{-1}} = \frac{1}{1-e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}.$$

Voorbeeld 5.3

Bepaal de z -transformatie van een digitaal element met $\{h(nT)\} = (\frac{1}{2})^n$.

$$Z\{h(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}.$$

De z -transformaties van twee bemonsterde signalen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ die beide op de bemonsteringstijdstippen dezelfde waarden hebben, zijn gelijk:

$$Z\{x_1(t)\} = Z\{x_2(t)\}.$$

De continue signalen kunnen echter behoorlijk van elkaar verschillen (zie fig. 5.3):

De z -transformatie is dus eenduidig voor de diskrete signaalwaarden maar niet voor de tussenliggende waarden, dus ook niet voor het continue signaal dat bemonsterd wordt.

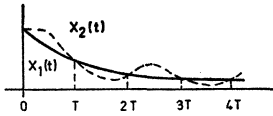


Fig. 5.3

De z -transformatie beeldt het p -vlak af in het z -vlak. Aangezien:

$$e^{pT} = e^{pT + j2\pi n} = e^{pT + jn\omega_s T} = e^{(p + jn\omega_s)T}$$

blijkt dat de afbeelding van de secundaire stroken in het p -vlak dezelfde is als de afbeelding van de primaire strook.

De imaginaire as in het p -vlak gaat over in de eenheidscirkel in het z -vlak, immers:

$$e^{j\omega T} = z, \text{ hieruit volgt: } \text{mod } z = 1 \text{ en } \arg z = \omega T.$$

Indien alleen de primaire strook wordt beschouwd, geldt:

$$\frac{-\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}, \quad \text{dus} \quad -\pi \leq \arg z \leq \pi.$$

Voor de lijnstukken AB en CD (zie fig. 5.4) geldt:

$$p = -\sigma \pm j \frac{\omega_s}{2} = -\sigma \pm j \frac{\pi}{T} \text{ met } 0 \leq \sigma \leq \infty.$$

Deze lijnstukken gaan in het z -vlak over in de lijnstukken $z = e^{-\sigma T} e^{\pm j\pi}$ of $\text{mod } z = e^{-\sigma T}$ voor $0 \leq \sigma \leq \infty$ en $\arg z = \pm \pi$.

De primaire strook in het linkerhalfvlak van het gesterde p -vlak wordt afgebeeld binnen de eenheidscirkel in het z -vlak (fig. 5.4). Samenvattend kan

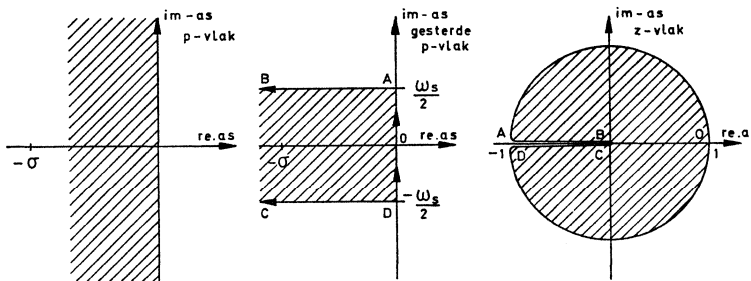


Fig. 5.4

men dus stellen dat het linkerhalfvlak van het p -vlak wordt afgebeeld in de primaire en secundaire stroken in het linkerhalfvlak van het gesterde p -vlak. Deze stroken worden afgebeeld binnen de eenheidskring in het z -vlak.

Evenals de Laplace transformatie heeft ook de z -transformatie een inverse. De inverse z -transformatie wordt gegeven met de volgende formule:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) z^{n-1} dz. \quad (5-7)$$

Hierin is C een gesloten contour in het z -vlak welke alle singuliere punten van de integrand omsluit.

Deze integraal wordt met behulp van de residustelling opgelost;

$$x(nT) = \text{som van de residuen van } X(z) z^{n-1}.$$

Indien $X(z)$ een nulpunt $z = 0$ heeft, wordt deze som voor enkelvoudige polen

$$\text{met } \frac{T(z)}{N(z)} = X(z)$$

$$x(nT) = \sum_{i=1}^k \frac{T(z_i) z_i^{n-1}}{N'(z_i)} \quad (5-8)$$

waarin z_i de polen van $N(z)$ zijn.

Indien $X(z)$ geen nulpunt $z = 0$ heeft, kan men gebruik maken van de verschuivingsregel (zie paragraaf 5.2) of dient men $x(nT)$ voor $n = 0$ afzonderlijk te bepalen (zie voorbeeld 5.5).

De afleiding van de inversieformule (5-7) is opgenomen in appendix A.

Voorbeeld 5.4

Gegeven:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}; \quad \text{stel } T = \ln 2.$$

Het polen- en nulpuntenbeeld van $H(z)$ is weergegeven in fig. 5.5.

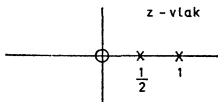


Fig. 5.5

Bepaal de impulsresponsie $y(nT)$ van dit element:

$$y(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\frac{1}{2}z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} z^{n-1} dz$$

De integrand heeft de enkelvoudige polen $z_1 = 1$ en $z_2 = \frac{1}{2}$. $T(z)z^{n-1} = \frac{1}{2}z^n$ en $N(z) = (z-1)(z-\frac{1}{2})$ dus $N'(z) = (z-1) + (z-\frac{1}{2})$.

Met de residustelling volgt nu:

$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_{i=1}^2 \frac{T(z_i) z_i^{n-1}}{N'(z_i)} \\ &= \frac{1^n (\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} + \frac{(\frac{1}{2})^n (\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - (\frac{1}{2})^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

of:

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (\frac{1}{2})^n) \delta(t - nT).$$

Hieruit volgt:

$$\{y(nT)\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots\}.$$

Voorbeeld 5.5

$$X(z) = \frac{1}{z - \alpha}.$$

Volgens de inversieformule geldt:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{z^{n-1}}{z - \alpha} dz.$$

Voor $n = 1, 2, \dots$ geldt:

$$x(nT) = \sum_{i=1}^k \frac{T(z_i) z_i^{n-1}}{N'(z_i)} \quad \text{met} \quad T(z) = 1, \quad N(z) = z - \alpha,$$

$N'(z) = 1$ en $z = \alpha$, dus:

$$x(nT) = \alpha^{n-1} \quad \text{voor} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Voor $n = 0$ geldt:

$$x(0) = \frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{1}{z(z - \alpha)} dz = \sum_{i=1}^2 \frac{T_0(z_i)}{N'_0(z_i)} \quad \text{met} \quad z_1 = 0, z_2 = \alpha,$$

$T_0(z) = 1$, $N_0(z) = z(z - \alpha)$ en $N'(z) = 2z - \alpha$.

Hieruit volgt:

$$x(0) = \frac{1}{-\alpha} + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

5.2 EIGENSCHAPPEN VAN DE Z-TRANSFORMATIE

Voor de z-transformatie bestaan een aantal zeer bruikbare theorema's die veel lijken op die, welke gelden voor de Laplace-transformatie. Voor de bewijzen van een aantal theorema's wordt verwezen naar appendix A.

I. Lineariteitstheorema's

a. additieve eigenschap

Als

$$Z[f_1(t)] = F_1(z) \text{ en } Z[f_2(t)] = F_2(z)$$

beide bestaan, geldt:

$$Z[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z) \quad (5-9)$$

voor willekeurige $f_1(t)$ en $f_2(t)$.

b. homogene eigenschap

Als $Z[f(t)]$ bestaat, geldt:

$$Z[\alpha f(t)] = \alpha F(z) \quad (5-10)$$

waarin α een willekeurige konstante is.

II. Reële verschuivingstheorema's

Als $Z[f(t)]$ bestaat en m is een positief reëel getal, dan geldt:

$$a. Z[f(t-mT)] = z^{-m} F(z) \quad (5-11)$$

$$b. Z[f(t+mT)] = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) z^{-k} \right] \quad (5-12)$$

Voorbeeld 5.6

Een digitaal element wordt beschreven door de differentievergelijking:

$$\begin{aligned} y(kT) + b_1 y(kT-T) + b_2 y(kT-2T) \\ = a_0 x(kT) + a_1 x(kT-T) + a_2 x(kT-2T) \end{aligned} \quad (5-13)$$

Door gebruik te maken van de verschuivingsregel gaat deze differentievergelijking over in de volgende algebraïsche vergelijking in z :

$$Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z)$$

of:

$$Y(z)(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = X(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}).$$

De overdrachtsfunctie $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ luidt:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}. \quad (5-14)$$

Het is ook mogelijk dit element te beschrijven met de volgende differentievergelijking:

$$\begin{aligned} y(kT+2T) + b_1 y(kT+T) + b_2 y(kT) \\ = a_0 x(kT+2T) + a_1 x(kT+T) + a_2 x(kT) \end{aligned} \quad (5-15)$$

Deze vergelijking gaat met toepassing van de tweede reële verschuivingsregel over in:

$$\begin{aligned} z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(T) + b_1 z Y(z) - b_1 zy(0) + b_2 Y(z) \\ = a_0 z^2 X(z) - a_0 z^2 x(0) - a_0 zx(T) + a_1 z X(z) - a_1 zx(0) - a_2 X(z). \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} Y(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2} X(z) + \\ + \frac{z^2 \{y(0) - a_0 x(0)\} + z \{y(T) + b_1 y(0) - a_0 x(T) - a_1 x(0)\}}{z^2 + b_1 z + b_2} \end{aligned} \quad (5-16)$$

Dit lijkt een geheel andere oplossing dan gevonden wordt voor (5-13), omdat hierin de beginwaarden $x(0)$, $x(T)$, $y(0)$ en $y(T)$ voorkomen. Bij de z -transformatie van (5-13) is er echter vanuit gegaan dat $x(nT) = y(nT) = 0$ voor $n = -1, -2, -3, \dots$. Indien $y(0)$ en $y(T)$ bepaald worden uit (5-15), met dezelfde voorwaarden $x(nT) = y(nT) = 0$ voor $n = -1, -2, -3$, door (5-15) op te lossen voor $n = -2$ en $n = -1$, volgt:

$$y(0) - a_0 x(0) = 0 \text{ en } y(T) + b_1 y(0) - a_0 x(T) - a_1 x(0) = 0$$

zodat ook in dit geval:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}. \quad (5-17)$$

III. Komplexe verschuivingstheoremata

Als $Z\{f(t)\} = F(z)$, dan geldt:

$$Z\{e^{\mp at} f(t)\} = F(ze^{\pm aT}). \quad (5-18)$$

Bij de toepassing van dit theorema bepaalt men eerst $F(z)$ en vervangt men hierin z door $ze^{\pm aT}$.

Voorbeeld 5.7

Stel $f(t) = U(t)$ dan geldt : $F(z) = \frac{z}{z-1}$.

Voor $Z\{e^{-at}\}$ wordt gevonden:

$$Z\{e^{-at}\} = Z\{e^{-at} U(t)\} = \frac{ze^{+aT}}{ze^{+aT} - 1} = \frac{z}{z - e^{-aT}} .$$

Dit theorema zal in het vervolg weinig gebruikt worden maar is buitengewoon waardevol voor het opstellen van een tabel van z -transformaties.

IV. *Differenties*

a. $Z\{\Delta^m f(nT)\} = (z-1)^m F(z) - z \sum_{k=0}^{m-1} (z-1)^{m-k-1} \Delta^k f(0)$ (5-19)

b. $Z\{\nabla^m f(nT)\} = (1-z^{-1})^m F(z)$ (5-20)

Deze formules kunnen worden afgeleid door het herhaald toepassen van de verschuivingsregels.

Voorbeeld 5.8

1. $\Delta f(kT) = f(kT+T) - f(kT)$

$$Z\{\Delta f(kT)\} = zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0)$$

2. $\nabla f(kT) = f(kT) - f(kT-T) =$

$$Z\{\nabla f(kT)\} = F(z) - z^{-1}F(z) = (1-z^{-1})F(z).$$

V. *Sommatieregel*

$$Z\left\{\sum_{k=0}^n f(kT)\right\} = Z\{g(nT)\} = \frac{z}{z-1} F(z). \quad (5-21)$$

Deze regel is de pendant van de integratieregels bij de Laplace transformatie.

Voorbeeld 5.9

De uitgangrij van een digitale sommatoren wordt gegeven door:

$$\{y(nT)\} = \sum_{k=0}^n x(kT) \quad (\text{zie fig. 5.6})$$

Indien $\{x(kT)\} = \{1, 1, 1, \dots\}$, geldt : $X(z) = \frac{z}{z-1}$.

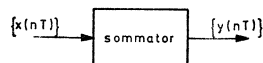


Fig. 5.6

Door gebruik te maken van de sommatieregel wordt gevonden:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

VI. *Vermenigvuldiging met a^n of a^{-n} waarin a een willekeurige konstante is*

$$a. \quad Z \{a^n f(t)\} = F(a^{-1} z) \quad (5-22)$$

$$b. \quad Z \{a^{-n} f(t)\} = F(az) \quad (5-23)$$

Deze formules zijn hoofdzakelijk bruikbaar voor diskrete elementen.

Voorbeeld 5.10

De ingangrij van een diskreet element is gegeven door $\{x(nT)\} = \{1, 1, 1, \dots\}$, dus $X(z) = \frac{z}{z-1}$. Indien de ingangrij wordt gegeven door $\{x_1(nT)\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ geldt:

$$Z \{x_1(nT)\} = Z \{(\frac{1}{2})^n x(nT)\} = \frac{(\frac{1}{2})^{-1} z}{(\frac{1}{2})^{-1} z - 1} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}.$$

VII. *Schaaleigenschap*

$$Z \{f(at)\} = F(z^{\frac{1}{a}}) = F(z_1), \quad (5-24)$$

waarin a een willekeurige konstante is.

Deze eigenschap zal worden toegepast bij de meervoudige bemonstering (paragraaf 5.4.1).

VIII. *Vermenigvuldiging met t^m of t^{-m} voor $m > 0$*

$$a. \quad Z \{t^m f(t)\} = \left(-zT \frac{d}{dz}\right)^m F(z) \quad (5-25)$$

$$b. \quad Z \{t^{-m} f(t)\} = \left(-\frac{1}{T}\right)^m \int_0^z \frac{1}{\xi_m} \int_0^{\xi_m} \frac{1}{\xi_{m-1}} \dots \int_0^{\xi_2} \frac{1}{\xi_1} F(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m \quad (5-26)$$

Deze eigenschap heeft weinig directe betekenis in het vervolg van deze monografie, maar is waardevol voor het opstellen van een tabel van z-transformaties.

Voorbeeld 5.10

Gegeven $f(t) = U(t)$ met $F(z) = \frac{z}{z-1}$.

Bepaal :

$$\begin{aligned} Z\{tU(t)\} &= -Tz \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \\ &= -Tz \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 5.11

Gegeven $f(t) = tU(t)$ met $F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$.

Bepaal $Z\{U(t)\}$

$$\begin{aligned} Z\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} &= Z\{U(t)\} = -\frac{1}{T} \int_0^z \frac{1}{\xi} \frac{T\xi}{(\xi-1)^2} d\xi \\ &= -\int_0^z \frac{1}{(\xi-1)^2} d\xi = \frac{1}{\xi-1} \Big|_0^z = \frac{1}{z-1} + 1 = \frac{z}{z-1}. \end{aligned}$$

IX. Limietwaarde theorema's

a. Beginwaarde theorema:

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (5-27)$$

b. Eindwaarde theorema :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z), \quad (5-28)$$

indien $(1-z^{-1})F(z)$ geen polen buiten de eenheidscirkel heeft en niet meer dan één pool in $z=1$ heeft.

Voorbeeld 5.12

Voor het bemonsterde uitgangssignaal geldt:

$$Y(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}} \frac{z}{z-1}.$$

Bepaal $y(0)$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} y(nT)$.

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{1}{1-e^{-aT}}.$$

Deze theorema's zullen in het vervolg diverse malen gebruikt worden.

Bovendien heeft men met deze theorema's een eenvoudige controle op de berekeningen die bij het transformeren zijn uitgevoerd.

X. Konvolutie eigenschappen

a. Reële konvolutie:

$$Z \left\{ \sum_{n=0}^k x(n) h(k-n) \right\} = X(z) H(z) \quad (5-29)$$

of :

$$Z \{x(k) * h(k)\} = X(z) H(z).$$

b. Komplexe konvolutie:

$$Z \{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{F_1(\xi) F_2(z/\xi) d\xi}{\xi} \quad (5-30)$$

waarin de contour C de polen van $F_1(\xi)$ en $F_2(z/\xi)$ scheidt.

De eigenschap van de reële konvolutie wordt veel toegepast, o.a. bij de bepaling van de overdrachtsfunctie van een systeem (zie hoofdstuk VI).

De complexe konvolutie-integraal zal in het vervolg weinig worden toegepast, maar is zeer nuttig voor het afleiden van een tabel van z -transformaties.

XI. Theorema van Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) f_2(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_C F_1(z) F_2(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (5-31)$$

mits F_1 en F_2 geen polen op of binnen de eenheidscirkel hebben. Voor de contour C wordt de eenheidscirkel gekozen.

Deze integraal kan worden opgelost met behulp van de residustelling. Indien $f_1(nT) = f_2(nT) = f(nT)$ geldt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT) &= \text{som van de residuen van } F(z) F(z^{-1}) z^{-1} \text{ voor de polen} \\ &\quad \text{van } F(z) z^{-1} \\ &= - \text{som van de residuen van } F(z) F(z^{-1}) z^{-1} \text{ voor de} \\ &\quad \text{polen van } F(z^{-1}). \end{aligned}$$

Het theorema van Parseval is geschikt voor het analytisch berekenen van een kwadratisch kostenkriterium. Hierin wordt vaak voor $f(nT)$ het foutsignaal $e(nT) = r(nT) - c(nT)$ (gewenste waarde - werkelijke waarde) gekozen.

Voorbeeld 5.13

Bepaal $\sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT)$ indien $f(nT) = e^{-anT}$. Er geldt :

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$F(z)F(z^{-1})z^{-1} = \left\{ \frac{z}{z - e^{-aT}} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1} - e^{-aT}} \right\} z^{-1} \cdot \\ = \frac{1}{(z - e^{-aT})(1 - ze^{-aT})}$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{1}{(z - e^{-aT})(1 - ze^{-aT})} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{T(z)}{N(z)} dz$$

met $T(z) = 1$ en $N(z) = (z - e^{-aT})(1 - ze^{-aT})$

$$N'(z) = -e^{-aT}(z - e^{-aT}) + (1 - ze^{-aT}).$$

Indien als contour de eenheidscirkel wordt gekozen, geldt:

$$\sum_{h=0}^{\infty} f^2(nT) = - \operatorname{res} \left. \frac{T(z)}{N(z)} \right|_{z=e^{-aT}} = \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-aT}} = \frac{1}{1 - e^{-2aT}}.$$

5.3 BEPALING VAN DE z -TRANSFORMATIE EN DE INVERSE z -TRANSFORMATIE

In het voorgaande zijn een aantal eigenschappen van de z -transformatie behandeld; met behulp hiervan is het mogelijk de z -transformatie van een groot aantal functies $f(t)$, of juist $f^*(nT)$ of $\{f(nT)\}$ te bepalen. In de meeste tekstboeken over dit onderwerp is bovendien een uitgebreide tabel met z -transformatie aanwezig, uitgaande van zowel $f(t)$ als $\{f(nT)\}$ als $F(p)$.

Tabel II geeft de meest voorkomende z -transformaties. Voor de bepaling van de z -transformatie kunnen de volgende methoden worden toegepast:

a. Maak gebruik van een tabel en pas eventueel hierbij de eigenschappen van de z -transformatie toe. Indien $F(p)$ gegeven is, kan men $F(p)$ vaak schrijven als de som van een aantal eenvoudiger functies in p en deze afzonderlijk transformeren. Indien $f(t)$ gegeven is als het produkt van tijdfuncties, kan de complexe konvolutie-eigenschap worden toegepast.

b. Pas formule $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$ toe, indien $x(t)$ gegeven is of indien de rij $\{x(nT)\}$ gegeven is.

c. Pas formule $X(z) = \sum_{n=0}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{\xi_n T} z^{-1}}$ toe, indien

$$X(p) = \frac{T(p)}{N(p)} \text{ gegeven is.}$$

In vele gevallen zal de transformatie bepaald dienen te worden van een functie waarin een nulde orde houdschakeling is opgenomen (fig. 5.7). Er geldt dan na toepassing van de verschuivingsregel :

$$Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} H(p) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left(\frac{H(p)}{p} \right).$$

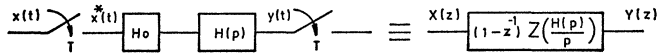


Fig. 5.7

De inverse z-transformatie kan bepaald worden met behulp van de volgende methoden:

a. Maak gebruik van een tabel en pas eventueel de eigenschappen van de z-transformatie toe.

Breuksplitsen van $F(z)$ in termen die eenvoudig zijn terug te transformeren of in de tabel staan, dient als volgt te geschieden:

Voor het geval $F(z)$ enkelvoudige polen heeft, geldt:

$$F(z) = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_n}{z - p_n}.$$

De inversie van de termen $\frac{A_i}{z - p_i}$ geeft echter komplikaties die worden vermeden door $F(z)$ eerst door z te delen. Er ontstaat dan:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A'_1}{z - p_1} + \frac{A'_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A'_n}{z - p_n}$$

of:

$$F(z) = \frac{A'_1 z}{z - p_1} + \frac{A'_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{A'_n z}{z - p_n}$$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{A'_k z}{z - p_k} \right\} = \{A'_k e^{-anT}\} \text{ of } Z^{-1} \{F(z)\} = \sum_{n=0}^{\infty} A'_k e^{-anT} \delta(t - nT),$$

waarin $p_k = e^{-aT}$ of $a = -\frac{1}{T} \ln p_k$.

b. Machtreeksontwikkeling.

Indien

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}},$$

dan kan $F(z)$ ook geschreven worden als

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

door de noemer op de teller te delen.

Tevens geldt:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n},$$

dus $c_0 = f(0)$, $c_1 = f(T)$, \dots $c_k = f(kT)$. Deze methode is vooral geschikt indien men $f(nT)$ voor een gering aantal waarden van n wil uitrekenen.

c. Inversieformule:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_c F(z) z^{n-1} dz.$$

In paragraaf 5.1 zijn een aantal voorbeelden gegeven van het gebruik van deze formule. Er volgt nu nog een voorbeeld waarin methoden a en b worden toegepast.

Voorbeeld 5.14

Gegeven de overdrachtsfunctie

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}.$$

Bepaal de impulsresponsie $y(nT)$ van dit systeem.

Toepassing van breuksplitsen levert:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{H(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

of:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\{y(nT)\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Toepassing van een machtreeksontwikkeling levert:

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{z^2 + 1\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}} = (1 - \frac{1}{2})z^{-1} + (1 - (\frac{1}{2})^2)z^{-2} + \dots$$

Hieruit volgt : $y(0) = 0$, $y(T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, \dots

5.4 DE GEMODIFICEERDE z-TRANSFORMATIE EN DE MEERVOUDIGE BEMONSTERINGSMETHODE

Wanneer de z -transformatie gebruikt wordt voor de analyse van systemen met signaalbemonstering is het slechts mogelijk informatie te verkrijgen van signalen op de tijdstippen $0, T, 2T, 3T, \dots, nT$, en niet tussen deze tijdstippen in. Om informatie over de signalen te verkrijgen tussen de bemonsterings-tijdstippen zijn de volgende methoden bruikbaar:

1. Meervoudige bemonstering
2. Gemodificeerde z -transformatie
3. Toestandsvergelijkingen.

De eerste twee methoden worden in dit hoofdstuk behandeld. Hoofdstuk XII is aan de derde methode gewijd.

5.4.1 Meervoudige bemonstering

In het systeem van fig. 5.8 zijn behalve de ideale bemonsteringsschakelaar S_1 óók nog aangebracht de fiktieve ideale schakelaars S_2, S_3 en S_4 . De schakelaars S_1 en S_3 sluiten op dezelfde tijdstippen $0, T, 2T, 3T, \dots, kT, \dots$ ($k > 0$ en geheel).

De schakelaars S_2 en S_4 sluiten op de tijdstippen

$$0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \dots, T, T + \frac{T}{n}, T + \frac{2T}{n}, \dots, 2T, \dots,$$

hierin is n een positief geheel getal.

De schakelaars S_2, S_3 en S_4 hebben geen invloed op het gedrag van het systeem.

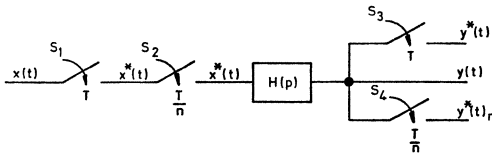


Fig. 5.8

Het continue uitgangssignaal $y(t)$ wordt gegeven door (5.32), zie ook hoofdstuk III.

$$y(t) = \sum_{m=0}^k x(mT) h(t-mT) \quad (m \text{ geheel}) \quad \text{voor } kT \leq t < kT + T \quad (5-32)$$

Het is ook mogelijk te schrijven:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) h(t-mT). \quad (5-33)$$

Hierin is $h(t)$ = impulsresponsie van het systeem $H(p)$. Op de bemonsteringsmomenten $t = k \frac{T}{n}$ (k geheel, $n > 0$ en geheel) wordt het uitgangssignaal:

$$y\left(k \frac{T}{n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) h\left(k \frac{T}{n} - mT\right). \quad (5-34)$$

Het signaal aan de uitgang van de fiktieve schakelaar S_4 wordt dan:

$$y^*(t)_n = \sum_{k=0}^{\infty} y\left(k \frac{T}{n}\right) \delta\left(t - k \frac{T}{n}\right).$$

Z-transformatie en toepassing van de schaaleigenschap geeft:

$$Y(z)_n = \sum_{k=0}^{\infty} y\left(k \frac{T}{n}\right) z^{-k/n}. \quad (5-35)$$

Substitutie van (5-34) in (5-35) geeft:

$$Y(z)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) h\left(k \frac{T}{n} - mT\right) z^{-k/n}. \quad (5-36)$$

Stel nu $\frac{k-nm}{n} = \frac{v}{n}$ (waarin ook v weer een geheel getal is), dan kan (5-36) geschreven worden als:

$$\begin{aligned} Y(z)_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) h\left\{\left(\frac{k-nm}{n}\right) T\right\} z^{-\left(\frac{k}{n}-m\right)-m} \\ &= \sum_{v=-nm}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h\left(v \frac{T}{n}\right) z^{-v/n} x(mT) z^{-m} \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} h\left(v \frac{T}{n}\right) z^{-v/n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-m}, \end{aligned}$$

omdat $h\left(v \frac{T}{n}\right) = 0$ voor $v = -1, -2, \dots$. Dus geldt:

$$Y(z)_n = H(z)_n X(z). \quad (5-37)$$

Vergelijking van $H(z)$ met $H(z)_n$ toont aan dat $H(z)_n$ uit $H(z)$ gevonden wordt door in $H(z)$ te schrijven $z = z^{1/n}$ en $T = \frac{T}{n}$.

Deze methode om op de tussenliggende tijdstippen $\frac{T}{n}$ informatie over het signaal y te verkrijgen, heet de *meervoudige bemonsteringsmethode*. Deze naam spreekt voor zich.

Voorbeeld 5.15

Gegeven het schema volgens fig. 5.9.

De schakelaars S_2 en S_3 zijn in werkelijkheid niet aanwezig in het systeem en worden alleen toegevoegd als hulpmiddel om $y\left(\frac{kT}{n}\right)$ te bepalen.

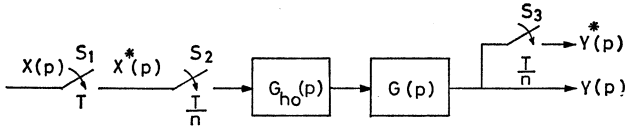


Fig. 5.9

$$G(p) = \frac{1}{1+p}, \quad G_{h0} = \frac{1-e^{-pT}}{p}, \quad X(p) = \frac{1}{p}, \quad T = \ln 4.$$

Neem $n = 2$.

Men mag de nulde orde houdschakeling niet aan de meervoudige bemonstering onderwerpen, omdat deze dan fysisch wordt veranderd. De tijdvertraging (e^{-pT}) zou dan met een factor n worden verkleind.

Voor $Y(z)_n$ geldt:

$$Y(z)_n = X(z)(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}_n,$$

door toepassing van de verschuivingsregel en (5-37) :

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{G(p)}{p}\right) &= Z\left\{\frac{1}{p(p+1)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \\ &= \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

$$Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}_2 = \frac{z^{\frac{1}{2}}(1-e^{-\frac{T}{2}})}{(z^{\frac{1}{2}}-1)(z^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{T}{2}})},$$

met $T = \ln 4$, dus:

$$Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}_2 = \frac{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}{(z^{\frac{1}{2}}-1)(z^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2})} \text{ volgt :}$$

$$Y(z)_2 = \frac{z}{z-1} \frac{z-1}{z} \frac{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}{(z^{\frac{1}{2}}-1)(z^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2})}.$$

Met de substitutie $z^{\frac{1}{2}} = z_2$ wordt het eindresultaat :

$$Y(z)_2 = \frac{\frac{1}{2}z_2}{(z_2-1)(z_2-\frac{1}{2})}.$$

Door deling van de noemer op de teller ontstaat de oplossing op de tijdstippen $t = 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T, \dots$ (zie fig. 5.10).

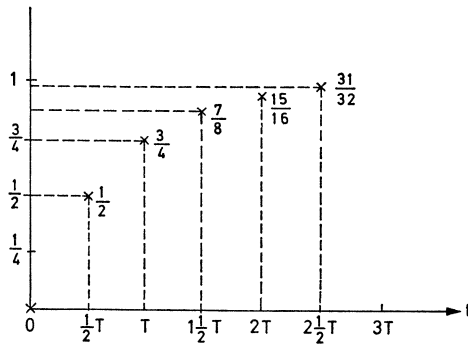


Fig. 5.10

5.4.2 Gemodificeerde z-transformatie

In fig. 5.11 is een systeem met signaalbemonstering gegeven waarin een fiktieve schakelaar S_2 (synchroon met S_1) en een fiktief vertragingselement $e^{-\Delta T p}$ zijn aangebracht ($0 < \Delta < 1$).

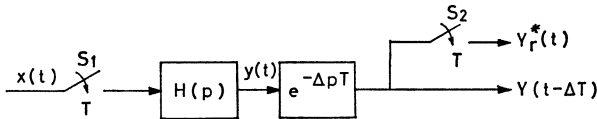


Fig. 5.11

De z-transformatie van het bemonsterde signaal $y_r^*(t)$ luidt:

$$Y_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT - \Delta T) z^{-n}. \quad (5-38)$$

Door de substitutie $\Delta = 1 - m$ ontstaat met $0 < m < 1$:

$$\begin{aligned} Y_r(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(nT - T + mT) z^{-n} \\ &= z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} y(nT + mT) z^{-n}. \end{aligned}$$

Deze uitdrukking voor het vertraagde signaal $y_r(t)$ wordt de *gemodificeerde z-transformatie* van $y(t)$ genoemd en gedefinieerd door:

$$Y(z, m) = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} y(nT + mT) z^{-n}. \quad (5-39)$$

Er geldt tevens:

$$y_r(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) h(kT - \Delta T - nT),$$

zodat:

$$Y_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) h(kT - \Delta T - nT) z^{-k}$$

Stel $k - n = v$, dan geldt:

$$\begin{aligned} Y_r(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} h(kT - \Delta T - nT) z^{-(k-n)} \\ &= \sum_{v=-n}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} h(vT - \Delta T) z^{-v}. \end{aligned}$$

Aangezien $h(vT - \Delta T) = 0$ voor $v = -1, -2, \dots$, geldt:

$$Y_r(z) = \sum_{v=0}^{\infty} h(vT - \Delta T) z^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

of:

$$Y(z, m) = H(z, m) X(z). \quad (5-40)$$

Voor de gemodificeerde z -transformatie of z_m -transformatie kunnen evenals voor de z -transformatie een groot aantal eigenschappen worden afgeleid die grote overeenkomst vertonen met de eigenschappen voor de z -transformatie. Voor de bepaling van de gemodificeerde z -transformatie kan men als volgt te werk gaan:

1. Maak gebruik van een tabel en pas eventueel de eigenschappen van de gemodificeerde z -transformatie toe
2. Pas de formule

$$X(z, m) = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT + mT) z^{-n}$$

toe met $0 < m < 1$, indien $x(t)$ gegeven is in het tijddomein.

3. Pas de formule

$$X(z, m) = z^{-1} \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{e^{m\xi_n T}}{1 - e^{\xi_n T} z^{-1}} \quad (5-41)$$

toe, indien $X(p) = \frac{T(p)}{N(p)}$ gegeven is met $0 < m < 1$.

De afleiding van deze formule vindt op dezelfde wijze plaats als de afleiding van de formule:

$$X(z) = \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{\xi_n T} z^{-1}}$$

in hoofdstuk III.

Men dient enige voorzichtigheid te betrachten bij de berekening van $X(z, m)$ voor $m \rightarrow 1$ of $\Delta \rightarrow 0$. Het is dan te verwachten dat de z -transformatie wordt gevonden, maar dit blijkt niet het geval te zijn wanneer de inverse Laplace transformatie van $X(p)$ diskontinu is (aantal polen minus het aantal nul-punten kleiner dan twee).

In dat geval worden bij de inverse gemodificeerde z -transformatie de waarden van $x(t)$ op het tijdstip $t = 0^-, T^-, 2T^-, \text{ enz.}$ gevonden, terwijl per definitie $x(t)$ op de tijdstippen $t = 0^+, T^+, 2T^+, \text{ enz.}$ wordt genomen.

Men dient als volgt te werk te gaan voor elementen met een diskontinue impulsresponsie.

$$\lim_{m \rightarrow 1} H(z, m) \neq H(z)$$

$$\text{maar } \lim_{m \rightarrow 0} zH(z, m) = H(z).$$

Voor systemen met een continue impulsresponsie geldt:

$$\lim_{m \rightarrow 1} H(z, m) = H(z) = H(z, 1) = \lim_{m \rightarrow 0} zH(z, m).$$

Voorbeeld 5.16

Gegeven het schema volgens fig. 5.12.

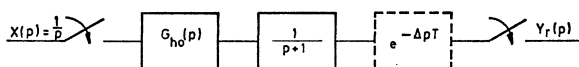


Fig. 5.12

De werking van de houdschakeling $G_{h0}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$ wordt door het invoeren van de fiktieve tijdvertraging niet beïnvloed.

$$Y(z, m) = X(z) G(z, m)$$

$$G(z, m) = Z_m \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{1}{p+1} \right\}$$

$$= (1 - z^{-1}) Z_m \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right\}$$

$$Z_m \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{z^{-1} e^{\xi m T}}{1 - z^{-1} e^{\xi T}} \Bigg|_{\xi=0} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z - 1}$$

$$Z_m \left(\frac{1}{p+1} \right) = \frac{z^{-1} e^{\xi m T}}{1 - z^{-1} e^{\xi T}} \Bigg|_{\xi=-1} = \frac{z^{-1} e^{-mT}}{1 - z^{-1} e^{-T}} = \frac{e^{-mT}}{z - e^{-T}}$$

$$\begin{aligned}
G(z, m) &= (1-z^{-1}) \left(\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-mT}}{z-e^{-T}} \right) \\
&= \frac{z-1}{z} \frac{z(1-e^{-mT}) - (e^{-T}-e^{-mT})}{(z-1)(z-e^{-T})} \\
&= \frac{z(1-e^{-mT}) - (e^{-T}-e^{-mT})}{z(z-e^{-T})}.
\end{aligned}$$

Voor $m \rightarrow 1$ geldt:

$$\lim_{m \rightarrow 1} G(z, m) = G(z, 1) = \frac{z(1-e^{-T})}{z(z-e^{-T})} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} = G(z).$$

Voorbeeld 5.17

Bepaal $G(z, m)$ als $G(p) = \frac{1}{p+a}$.

$$G(z, m) = \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}} \quad (\text{zie vorige voorbeeld}).$$

Voor $m \rightarrow 1$ geldt:

$$G(z, m) = \lim_{m \rightarrow 0} zG(z, m) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{ze^{-amT}}{z-e^{-aT}} = \frac{z}{z-e^{-aT}},$$

maar:

$$\lim_{m \rightarrow 1} G(z, m) = \frac{e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \neq G(z).$$

Evenals voor de gewone z -transformatie kan ook voor de gemodificeerde z -transformatie een inversieformule worden afgeleid. Deze luidt:

$$x(nT+mT) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(x, m) z^{n-1} dz, \quad (5-42)$$

waarin C een gesloten contour is in het z -vlak die alle singuliere punten van de integrand omvat. Behalve met deze formule kan $x(nT+mT)$ ook bepaald worden uit een machtreeksontwikkeling

$$X(z, m) = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT+mT) z^{-n},$$

of

$$zX(z, m) = x(mT) + x(T+mT)z^{-1} + \dots$$

Hieruit volgt voor $0 < m < 1$

$$x(mT) = \lim_{z \rightarrow \infty} zX(z, m)$$

$$x(T+mT) = - \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{\partial}{\partial z} zX(z, m)$$

$$x(2T+mT) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[z^2 \frac{\partial}{\partial z} zX(z, m) \right]$$

enz.

De coëfficiënten $x(kT+mT)$ zijn gelijk aan de waarde van $x(t)$ op het tijdstip $kT+T-\Delta T$.

Voorbeeld 5.18

Gegeven

$$G(z) = \frac{z}{z-e^{-T}} \quad \text{en} \quad G(z, m) = \frac{e^{-mT}}{z-e^{-T}}$$

Bepaal de impulsresponsie $y(t)$ van dit element. Stel $T = \ln 4$ en $m = \frac{1}{2}$, dan geldt:

$$G(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \quad \text{en} \quad y(nT) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta(t-nT) \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$G(z, m) = \frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{4}}; \quad zG(z, m) = \frac{\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y(mT) = \frac{1}{2} = y(T-\Delta T) = y\left(\frac{1}{2}T\right)$$

$$y(mT+T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = y(2T-\Delta T) = y\left(1\frac{1}{2}T\right) \quad \text{enz.}$$

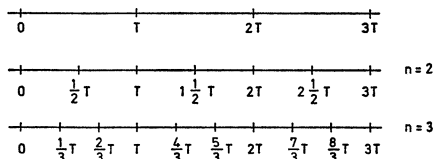


Fig. 5.13

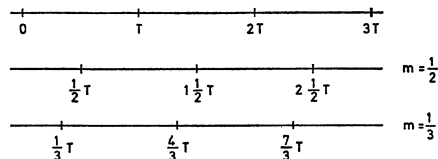


Fig. 5.14

Indien de meervoudige bemonsteringsmethode toegepast wordt, kan een signaal $x(t)$ slechts op diskrete tijdstippen worden bepaald die een fraktie zijn van de bemonsteringstijd voor $n = 2, 3$ (zie fig. 5.13).

Indien de gemodificeerde z -transformatie wordt gebruikt, kan $x(t)$ op elk willekeurig tijdstip worden bepaald omdat m elke willekeurige waarde tussen $m = 0$ en $m = 1$ kan aannemen. De gevonden waarden van $x(t)$ liggen echter steeds T uit elkaar (zie fig. 5.14) voor $m = \frac{1}{2}$ en $m = \frac{1}{3}$.

Tabel V. 1: Eigenschappen van de z -transformatie

I. Lineariteitstheorema's

$$\begin{array}{ll} \text{a. } f_1(t) \pm f_2(t) & F_1(z) \pm F_2(z) \\ \text{b. } \alpha f(t) & \alpha F(z) \end{array}$$

II. Reële verschuivingstheorema's

$$\begin{array}{ll} \text{a. } f(t-mT) & z^{-m} F(z) \\ \text{b. } f(t+mT) & z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) z^{-k} \right] \end{array}$$

III. Komplexe verschuivingstheorema's

$$e^{\mp at} f(t) \quad F(z e^{\pm aT})$$

IV. Differenties

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \Delta^m f(nT) & (z-1)^m F(z) \\ & - z \sum_{k=0}^{m-1} (z-1)^{m-k-1} \Delta^k f(0) \\ \text{b. } \nabla^m f(nT) & (1-z^{-1})^m F(z) \end{array}$$

V. Sommatieregel

$$g(nT) = \sum_{k=0}^n f(kT) \quad G(z) = \frac{z}{z-1} F(z)$$

VI. Vermenigvuldiging met $a^{\pm n}$

$$\begin{array}{ll} a^n f(t) & F(a^{-1} z) \\ a^{-n} f(t) & F(az) \end{array}$$

VII. Schaaleigenschap

$$f(at) \quad F\left(z^{\frac{1}{a}}\right)$$

VIII. Vermenigvuldiging met $t^{\pm m}$

$$\begin{aligned}
 t^m f(t) & \left(-zT \frac{d}{dz} \right)^m F(z) \\
 t^{-m} f(t) & -\frac{1}{T} \int_0^z \frac{1}{\xi_m} \int_0^{\xi_m} \frac{1}{\xi_{m-1}} \dots \\
 & \dots \int_0^{\xi_2} \frac{1}{\xi_1} F(\xi_1) d\xi_1 \dots d\xi_m
 \end{aligned}$$

IX. Limietwaardetheorema's

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) & \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \\
 \text{b. } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) & \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)
 \end{aligned}$$

X. Konvolutie-eigenschappen

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \sum_{n=0}^k f_1(nT) f_2(k-n) & F_1(z) F_2(z) \\
 \text{b. } f_1(t) f_2(t) & \frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{F_1(\xi) F_2(z/\xi)}{\xi} d\xi
 \end{aligned}$$

XI. Theorema van Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) f_2(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_c F_1(z) F_2(z^{-1}) z^{-1} dz$$

Tabel V. 2 : Enige z-transformaties en z_m-transformaties

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$	$F(z, m)$
$\delta(t)$	1	1	0
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT(z-1)+T}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-amT}\{e^{-aT}+m(z-e^{-aT})\}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$	$\frac{z \sin m\omega T + \sin(1-m)\omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
$\cos \omega T$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos \omega T)}{z^2-2z \cos \omega T+1}$	$\frac{z \cos m\omega T - \cos(1-m)\omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T-e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-amT}\{z \sin m\omega T - e^{-aT} \sin(1-m)\omega T\}}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T-e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T-e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-amT}\{z \cos m\omega T + e^{-aT} \sin(1-m)\omega T\}}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T-e^{-2aT}}$

VI. Blokschema's van systemen met signaalbemonstering en digitale systemen

6.1 INLEIDING

Bij de beschrijving van regelsystemen wordt veelvuldig gebruik gemaakt van blokschema's en stroomschema's. Deze schema's geven in een grafische voorstelling het verband weer tussen de diverse overdrachtfuncties van de elementen waaruit de regelkring is opgebouwd en tussen de signalen die in dit schema een rol spelen, zoals ingangs-, uitgangs- en stoorsignalen.

In monografie 1 worden blokschema's en stroomschema's uitvoerig beschreven voor continue systemen. In dit hoofdstuk zal de beschrijving van blokschema's van systemen met signaalbemonstering gegeven worden.

In systemen met signaalbemonstering en digitale regelsystemen komen zowel elementen voor die diskreet zijn, als elementen die continu zijn. Onderscheid kan gemaakt worden in de volgende 3 soorten systemen:

1. Elk element in het blokschema is een diskreet element en wordt dus beschreven door een differentievergelijking die het verband tussen de ingangs- en uitgangrij van getallen weergeeft. Deze differentievergelijkingen worden met behulp van de z -transformatie getransformeerd naar een overdrachtfunctie in z of z^{-1} die het verband tussen de in- en uitgang van het element weergeeft.
2. Elk element in het blokschema is een continu element, maar op één of meer plaatsen in de regelkring wordt het signaal bemonsterd. In feite wordt nu elk element beschreven door een differentiaalvergelijking terwijl aan sommige elementen een gewogen pulsreeks wordt toegevoerd. Men krijgt nu een beschrijving van het systeem die zowel uit gesterde als uit niet gesterde overdrachtfuncties in de Laplace operator p bestaat. De beschrijving van deze systemen wordt vereenvoudigd door de signalen waarin men geïnteresseerd is, bijvoorbeeld het uitgangs- of het fout-signaal, alleen op de bemonsteringstijdstippen te beschouwen door het invoeren van fiktieve schakelaars. Het is dan mogelijk de totale overdrachtfunctie of het signaal waarin men geïnteresseerd is te beschrijven als een functie in z of z^{-1} .
3. In het blokschema komen zowel diskrete als continue elementen voor. Dit is een hybride systeem waarvan sommige elementen beschreven worden door differentievergelijkingen en andere elementen door differentiaalvergelijkingen. Ook hier is het mogelijk door het invoeren van

fiktieve schakelaars het gehele systeem te beschrijven in z -getransformeerde overdrachtsfuncties of signalen. Het invoeren van fiktieve schakelaars is niet nodig indien men in het ingangs- of het uitgangssignaal van een diskreet element geïnteresseerd is als functie van de overige elementen van het systeem.

6.2 OVERDRACHTSFUNKTIE DISKRETE ELEMENTEN

Door transformatie naar het z -domein van de differentievergelijking die het diskrete element beschrijft ontstaat een overdrachtsfunctie $H(z)$ of $H(z^{-1})$ die het verband tussen de z -getransformeerde in- en uitgangsrijen $X(z)$ en $Y(z)$ aangeeft (zie fig. 6.1).

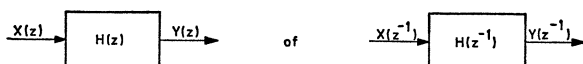


Fig. 6.1

Indien de ingangsrij bekend is volgt hieruit dus $X(z)$. Als bovendien de overdrachtsfunctie $H(z)$ van het diskrete element bekend is volgt hieruit eenvoudig $Y(z) = H(z) X(z)$ of $Y(z^{-1}) = H(z^{-1}) X(z^{-1})$.

Het is eveneens mogelijk $H(z)$ of $H(z^{-1})$ te bepalen uit de in- en uitgangsrijen $x(nT)$ en $y(nT)$ door de z -transformatie hiervan te nemen en deze functies in z of z^{-1} op elkaar te delen. Hierbij wordt verondersteld dat de beginvoorwaarden nul zijn.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{of} \quad H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} \quad (6-1)$$

In het vervolg zal steeds over $H(z)$ gesproken worden, waarbij $H(z)$ ook een functie van z^{-1} kan zijn.

Voorbeeld 6.1

Stel dat aan een digitaal systeem een rij getallen $\{x(nT)\}$ wordt toegevoerd op de tijden $t = 0, T, 2T, \dots$, terwijl aan de uitgang een rij getallen $\{y(nT)\}$ op dezelfde tijden wordt gegenereerd.

Stel $\{x(nT)\} = \{2, 1, 0, 0, \dots\}$ en $\{y(nT)\} = \{16, 16, 8, 4, 1, 0, 0, \dots\}$. Gevraagd wordt de overdrachtsfunctie $H(z)$ van het systeem

$$\begin{aligned} X(z) &= 2 + z^{-1} \quad \text{en} \quad Y(z) = 16 + 16z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4} \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{16 + 16z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}}{2 + z^{-1}} \\ &= 8 + 4z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} \end{aligned}$$

Voorbeeld 6.2

Stel dat de overdrachtsfunctie van een digitaal element luidt: $H(z) = \frac{z}{z-1}$.

Op het element wordt een rij $\{x(nT)\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$ gezet op de tijden $t = 0, T, 2T, \dots$

Bepaal de rij getallen aan de uitgang $\{y(nT)\}$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = H(z) X(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1}$$

$$\{y(nT)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} \right\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$\{y(nT)\}$ kan ook gevonden worden door de reële konvolutie toe te passen:
 $x(kT) * h(kT) = y(kT)$

$$\text{of } y(kT) = \sum_{n=0}^k h(nT) \cdot x(kT-nT) = \sum_{n=0}^k h(kT-nT) \cdot x(nT)$$

In dit voorbeeld geldt $x(nT) = h(nT) = \{1, 1, 1, \dots\}$

$$\text{of } y(0) = h(0) x(0) = 1$$

$$y(T) = h(0) x(T) + h(T) x(0) = 2$$

$$y(2T) = h(0) x(2T) + h(T) x(T) + h(2T) x(0) = 3, \text{ enzovoort.}$$

Voor een systeem bestaande uit diskrete elementen kan een blokschema in z worden genoteerd, met dezelfde eigenschappen bij de bewerkingen van de blokken als van continue systemen (zie monografie 1).

Voorbeeld 6.3

Bepaal $C(z)$ als functie van $R(z)$ en de overdrachtsfuncties $H_1(z)$, $H_2(z)$ en $H_3(z)$ (zie fig. 6.2).

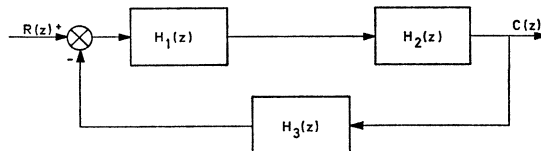


Fig. 6.2

$$C(z) = \frac{R(z) \cdot H_1(z) \cdot H_2(z)}{1 + H_1(z) H_2(z) H_3(z)}$$

6.3 OVERDRACHTSFUNKTIE BEMONSTERDE SYSTEMEN

De volgende gevallen kunnen worden onderscheiden:

1. Een kontinu element waarvan de uitgang wordt bemonsterd.
2. Een kontinu element waarvan de ingang wordt bemonsterd.
3. Een kontinu element waarvan de ingang en de uitgang wordt bemonsterd.

ad 1. Kontinu element waarvan de uitgang wordt bemonsterd (zie fig. 6.3):

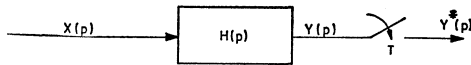


Fig. 6.3

$$Y(p) = X(p) \cdot H(p) \text{ en } Y^*(p) = (X(p) \cdot H(p))^*$$

Na invoering van de z-transformatie geldt:

$$Y(z) = XH(z) \tag{6-2}$$

Met deze notatie wordt aangegeven dat X en H gezamenlijk getransformeerd worden en niet afzonderlijk. Hieruit volgt dat $(X(p) \cdot H(p))^*$ als één functie in p behandeld dient te worden en daarna naar het z -domein getransformeerd wordt. Het is nu niet mogelijk de uitgang expliciet in de ingang uit te drukken. Bovendien geldt $X(z) H(z) \neq XH(z)$

Voorbeeld 6.4 $X(p) = \frac{1}{p}$ en $H(p) = \frac{1}{p}$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} \text{ en } Y(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}, \text{ maar}$$

$$Y(z) \neq Z\left(\frac{1}{p}\right) \cdot Z\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

ad 2. Kontinu element waarvan de ingang wordt bemonsterd (zie fig. 6.4):

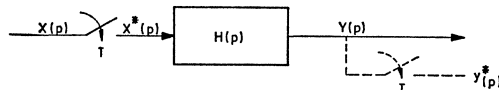


Fig. 6.4

$$Y(p) = X^*(p) \cdot H(p).$$

Dit is een gemengde uitdrukking en het is in de meeste gevallen onmogelijk $Y(p)$ te vinden als een rationale uitdrukking in p .

Door het toevoegen van een fictieve schakelaar, gestippeld weergegeven in fig. 6.4, is het mogelijk $Y^*(p)$ te vinden, dus informatie over de *continue* uitgang op de bemonsteringstijdstippen.

$$Y^*(p) = (X^*(p) \cdot H(p))^* = X^*(p) H^*(p) \text{ of na transformatie:}$$

$$Y(z) = X(z) H(z) \quad (6-3)$$

(zie hoofdstuk V, konvolutie eigenschap). Met behulp van de gemodificeerde z-transformatie of met behulp van de meervoudige bemonsteringsmethode is het echter mogelijk informatie tussen de bemonsteringstijdstippen te verkrijgen (zie fig. 6.5).

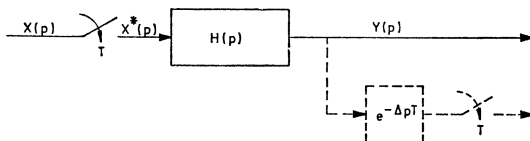


Fig. 6.5

Er geldt dan:

$$Y(z, m) = X(z) \cdot G(z, m) \quad (6-4)$$

ad 3. Continu element waarvan de ingang en de uitgang wordt bemonsterd (zie fig. 6.6).

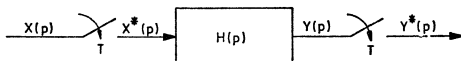


Fig. 6.6

$$Y^*(p) = (X^*(p) H(p))^* = X^*(p) H^*(p) \text{ of } Y(z) = X(z) H(z) \quad (6-5)$$

Een dergelijk element wordt dus op dezelfde wijze beschreven als een diskreet element. Er wordt hetzelfde resultaat verkregen als in geval 2. In geval 2 is de uitgang echter continu en wordt dus slechts een beperkte informatie van de uitgang verkregen. In geval 3 wordt alle informatie over de uitgang verkregen.

6.4 INVOEREN VAN BEGINVOORWAARDEN

De overdrachtsfunctie van een element geeft het verband tussen de in- en uitgang van een element weer indien de beginvoorwaarden nul gesteld worden. Het is echter ook mogelijk beginvoorwaarden in de beschrijving met blokschema's op te nemen.

Hieronder volgt een voorbeeld van een diskreet element met beginvoorwaarden.

Voorbeeld 6.5 Het element wordt beschreven door de volgende differentievergelijking:

$$y(kT+2T) - \frac{3}{4}y(kT+T) + \frac{1}{8}y(kT) = x(kT+T) + \frac{1}{2}x(kT).$$

Na z -transformatie met gebruik van de verschuivingsregel ontstaat:

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(T) - \frac{3}{4}zY(z) + \frac{3}{4}zy(0) + \frac{1}{8}Y(z) = zX(z) - zx(0) + \frac{1}{2}X(z)$$

of

$$Y(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} X(z) + \frac{z^2 - \frac{3}{4}z}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} y(0) + \frac{z}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} y(T) - \frac{z}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} x(0)$$

In blokschema is dit weergegeven in fig. 6.7.

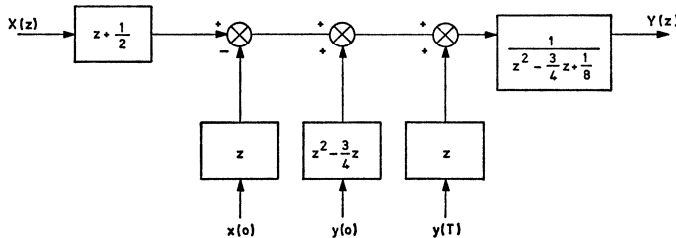


Fig. 6.7

In het blokschema zijn gescheiden aangegeven de gedeelten die verantwoordelijk zijn voor de responsie op de beginvoorwaarden (onderste gedeelte) en voor de responsie op beginvoorwaarden nul (bovenste gedeelte).

Voor de responsie op de beginvoorwaarden nul geldt:

$$y(-1) = y(-2) = x(-1) = x(-2) = 0 \quad \text{en} \quad x(kT) \neq 0 \quad \text{voor} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

De responsie $y_1(kT)$ voor $k=0, 1, 2, \dots$ wordt gevonden door in (6-6) $k = -2$, $k = -1$, enz. in te vullen. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_1(T) &= x(0) \\ y_1(2T) &= \frac{3}{4}y_1(T) + x(T) + \frac{1}{2}x(0), \text{ enz.} \end{aligned}$$

Voor de responsie op deze beginvoorwaarden in $y(kT)$ geldt:

$$x(kT) = 0 \quad \text{voor} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

De responsie $y_2(kT)$ voor $k=0, 1, 2, \dots$ wordt eveneens gevonden door in (6-6) $k = -2$, $k = -1$, enz. in te vullen. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
y_2(0) &= \frac{3}{4}y_2(-T) - \frac{1}{8}y_2(-2T) + x(-T) + \frac{1}{2}x(-2T) \\
y_2(T) &= \frac{3}{4}y_2(0) - \frac{1}{8}y_2(-T) + \frac{1}{2}x(-T) \\
y_2(2T) &= \frac{3}{4}y_2(T) - \frac{1}{8}y_2(0), \text{ enzovoort.}
\end{aligned}$$

De totale responsie $y(nT) = y_1(nT) + y_2(nT)$ voor $n = -2, -1, 0, 1 \dots$ luidt:

$$\begin{aligned}
y(-2T) &= y_2(-2T) & y(-T) &= y_2(-T) \\
y(0) &= y_1(0) + y_2(0) = \frac{3}{4}y(-T) - \frac{1}{8}y(-2T) + x(-T) + \frac{1}{2}x(-2T) \\
y(T) &= y_1(T) + y_2(T) = x(0) + \frac{3}{4}y_2(0) - \frac{1}{8}y(-T) + \frac{1}{2}x(-T) \\
&= x(0) + \frac{3}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-T) + \frac{1}{2}x(-T), \text{ aangezien } y_2(0) = y(0) \\
y(2T) &= \frac{3}{4}y_1(T) + x(T) + \frac{1}{2}x(0) + \frac{3}{4}y_2(T) - \frac{1}{8}y_2(0) \\
&= \frac{3}{4}(y_1(T) + y_2(T)) - \frac{1}{8}y_2(0) + x(T) + \frac{1}{2}x(0) \\
&= \frac{3}{4}y(T) - \frac{1}{8}y(0) + x(T) + \frac{1}{2}x(0) \text{ enzovoort.}
\end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat de tak van $x(0)$ naar $Y(z)$ uit het blokschema kan verdwijnen omdat $x(0) = 0$ verondersteld is als beginvoorwaarde.

De takken van $y(0)$ naar $Y(z)$ en van $y(T)$ naar $Y(z)$ blijven gehandhaafd en zijn verantwoordelijk voor de responsie op de beginkondities $y(-T)$, $y(-2T)$, $x(-T)$ en $x(-2T)$. Het is daarom juist om voor $y(0)$ en $y(T)$ resp. $y_2(0)$ en $y_2(T)$ te schrijven, zie fig. 6.8.

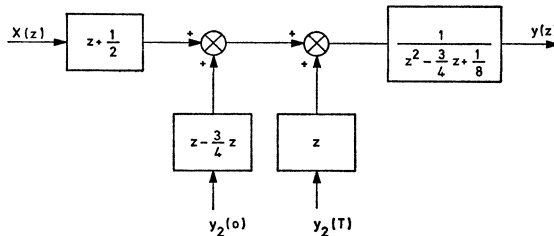


Fig. 6.8

De invloed van de beginvoorwaarden op de uitgang kan dus worden opgevat als een impulsresponsie.

In dit geval kan $y(nT)$ voor $n = 2, 3, 4, \dots$ berekend worden indien $y(0)$ en $y(T)$ bekend zijn.

6.5 VOORBEELDEN VAN BLOKSCHEMA'S

In de volgende blokschema's is aangenomen dat alle schakelaars voldoende kort sluiten en synchroon bemonsteren op de tijdstippen $t = 0, T, 2T, \dots$. Denkbeeldige schakelaars zijn gestippeld aangegeven en zijn slechts nodig voor de berekening van een signaal op de bemonsteringstijdstippen.

Voorbeeld 6.6

De overdrachtsfunctie van een serieschakeling van elementen met signaalbemonstering tussen de elementen (fig.6.9).

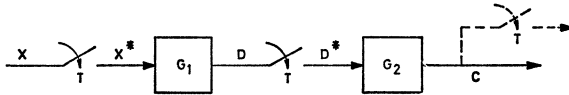


Fig. 6.9

De uitgang van G_1 is $D(p) = G_1(p) X^*(p)$ en $D^*(p) = G_1^*(p) X^*(p)$
 De uitgang van G_2 is $C(p) = G_2(p) D^*(p)$ of $C(p) = G_2(p) G_1^*(p) X^*(p)$
 Tevens geldt: $C^*(p) = G_2^*(p) G_1^*(p) X^*(p)$ dus $C(z) = G_1(z) G_2(z) X(z)$

De overdrachtsfunctie luidt:
$$\frac{C(z)}{X(z)} = G_1(z) G_2(z). \quad (6-5)$$

Voorbeeld 6.7

De overdrachtsfunctie van een serieschakeling van elementen zonder signaalbemonstering tussen de elementen (fig. 6.10).

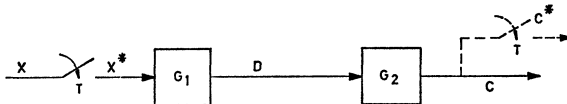


Fig. 6.10

$$C(p) = G_2(p) D(p) = G_1(p) G_2(p) X^*(p),$$

dus $C^*(p) = \{G_1(p) G_2(p)\}^* X^*(p)$
 $C^*(p) = (G_1 G_2)^*(p) X^*(p)$ waarin

$$(G_1 G_2)^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_1(p + jn\omega_s) G_2(p + nj\omega_s)$$

Dus:

$C(z) = G_1 G_2(z) \cdot X(z)$ en de overdrachtsfunctie luidt
$$\frac{C(z)}{X(z)} = G_1 G_2(z)$$

Indien men de eigenschappen van één van de elementen wijzigt dient dus de totale overdrachtsfunctie opnieuw berekend te worden.

Voorbeeld 6.8

De overdrachtsfunctie van een parallelschakeling van elementen zonder signaalbemonstering in de paralleltakken (zie fig. 6.11).

$$\begin{aligned}
C(p) &= D_1(p) + D_2(p) & \text{en} & & C^*(p) &= D_1^*(p) + D_2^*(p) \\
D_1(p) &= X^*(p) G_1(p) & & & D_1^*(p) &= X^*(p) G_1^*(p) \\
D_2(p) &= X^*(p) G_2(p) & & & D_2^*(p) &= X^*(p) G_2^*(p) \\
C^*(p) &= X^*(p) \{G_1^*(p) + G_2^*(p)\}
\end{aligned}$$

dus:

$$C(z) = X(z) \{G_1(z) + G_2(z)\}$$

De overdrachtsfunctie luidt $\frac{C(z)}{X(z)} = G_1(z) + G_2(z)$. (6-6)

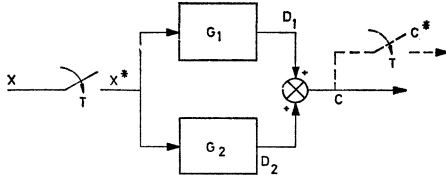


Fig. 6.11

Voorbeeld 6.9

De overdrachtsfunctie van een parallelschakeling van een element met, en een element zonder signaalbemonstering.

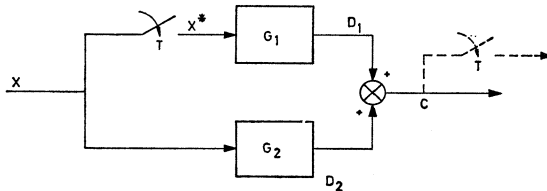


Fig. 6.12

$$\begin{aligned}
C(p) &= D_1(p) + D_2(p) & C^*(p) &= D_1^*(p) + D_2^*(p) \\
D_1(p) &= X^*(p) G_1(p) & D_1^*(p) &= X^*(p) G_1^*(p) \\
D_2(p) &= X(p) G_2(p) & D_2^*(p) &= \{X(p) G_2(p)\}^* \\
C^*(p) &= X^*(p) G_1^*(p) + \{X(p) G_2(p)\}^*; & \text{hieruit volgt:} & \\
C(z) &= X(z) G_1(z) + X G_2(z). & & & & (6-7)
\end{aligned}$$

De overdrachtsfunctie $\frac{C(z)}{X(z)}$ is dus niet expliciet uit te drukken.

Voorbeeld 6.10

De overdrachtsfunctie van een teruggekoppeld systeem met signaalbemonstering in de voorwaartse weg (fig. 6.13).

$$\begin{aligned}
C(p) &= G(p) X^*(p) \\
X(p) &= R(p) - C(p) H(p) \quad \text{of} \quad X(p) = R(p) - G(p) H(p) X^*(p) \\
X^*(p) &= R^*(p) - \{G(p) H(p) X^*(p)\}^* \\
&= R^*(p) - \{G(p) H(p)\}^* X^*(p) = R^*(p) - (GH)^*(p) X^*(p)
\end{aligned}$$

dus:

$$X^*(p) = \frac{R^*(p)}{1 + (GH)^*(p)} \quad \text{en} \quad C(p) = \frac{G(p) R^*(p)}{1 + (GH)^*(p)}$$

Eveneens geldt: $C^*(p) = G^*(p) X^*(p)$ dus $C^*(p) = \frac{G^*(p) R^*(p)}{1 + (GH)^*(p)}$

of :

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z) \quad (6-8)$$

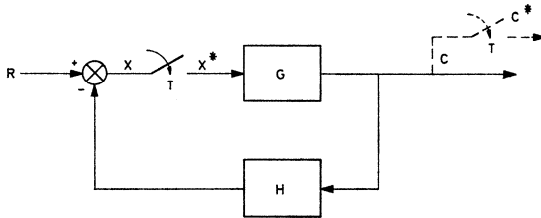


Fig. 6.13

Voorbeeld 6.11

De overdrachtsfunctie van een teruggekoppeld systeem met signaalbe-monstering in de terugkoppelweg (fig. 6.14).

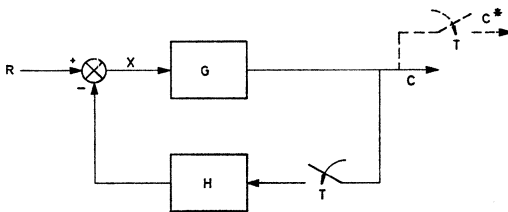


Fig. 6.14

$$\begin{aligned}
C(p) &= G(p) X(p) \Rightarrow C^*(p) = (GX)^*(p) \\
X(p) &= R(p) - H(p) C^*(p) \Rightarrow \\
G(p) X(p) &= G(p) R(p) - G(p) H(p) C^*(p)
\end{aligned}$$

dus:

$$(GX)^*(p) = (GR)^*(p) - (GH)^*(p) C^*(p)$$

Hieruit volgt: $C(p) = (GR)^*(p) - (GH)^*(p) C^*(p)$
 en $C^*(p) = (GR)^*(p) - (GH)^*(p) C^*(p)$
 zodat:

$$C^*(p) = \frac{(GR)^*(p)}{1 + (GH)^*(p)} \quad \text{of} \quad C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}. \quad (6-9)$$

De overdrachtsfunctie $\frac{C(z)}{R(z)}$ is dus niet expliciet te vinden.

6.6 BEPALING VAN DE OVERDRACHTSFUNKTIE VAN SYSTEMEN INDIEN DE GEMODIFICEERDE Z-TRANSFORMATIE WORDT GEBRUIKT

Zoals reeds hiervoor is aangegeven in hoofdstuk V is het mogelijk met behulp van de gemodificeerde z-transformatie een signaal tussen de bemonsteringsperiodes te bepalen door het invoeren van een fictieve tijdvertraging ΔT .

Deze methode kan ook toegepast worden in teruggekoppelde systemen.

Voorbeeld 6.12

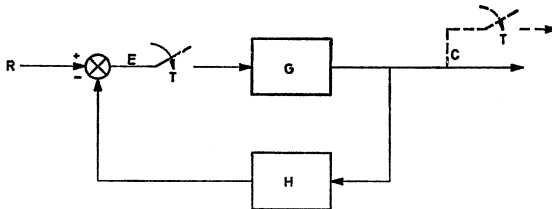


Fig. 6.15

Indien men van het systeem volgens fig. 6.15 het uitgangssignaal $c(t)$ tussen de bemonsteringstijdstippen wil bepalen dient een fictieve tijdvertraging ΔT te worden ingevoerd. Dit kan op twee manieren:

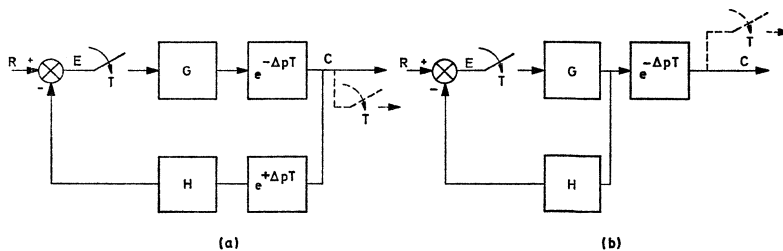


Fig. 6.16

In het eerste geval is de vertraging in de totale kring aangebracht zodat een voorijling ΔT dient te worden toegevoegd om het terugkoppelsignaal niet te beïnvloeden. In het tweede geval is de vertraging buiten de regelkring aangebracht.

Voor het blokschema volgens fig. 6.16b kan genoteerd worden:

$$C(z, m) = G(z, m) \cdot E(z) \text{ en} \\ E(p) = R(p) - H(p) \cdot G(p) E^*(p).$$

Hieruit volgt:

$$E^*(p) = R^*(p) - (GH)^*(p) E^*(p) \text{ zodat:}$$

$$E^*(p) = \frac{R^*(p)}{1 + (GH)^*(p)} \text{ of } E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)}.$$

Voor $C(z, m)$ wordt gevonden:

$$C(z, m) = \frac{R(z) G(z, m)}{1 + GH(z)}. \quad (6-10)$$

Voorbeeld 6.13

Bepaal de gemodificeerde z-transformatie van de uitgang van het systeem, weergegeven in fig. 6.17a.

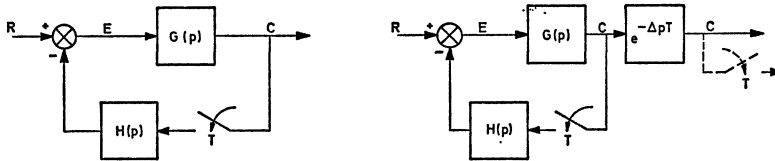


Fig. 6.17

$$C(p) = R(p) G(p) - G(p) H(p) C^*(p) \\ C(p) e^{-\Delta p T} = R(p) G(p) e^{-\Delta p T} - G(p) H(p) e^{-\Delta p T} \cdot C^*(p)$$

zodat:

$$C(z, m) = RG(z, m) - GH(z, m) C(z).$$

Bovendien geldt:

$$C^*(p) = (RG)^*(p) - (GH)^*(p) C^*(p) \text{ of} \\ C(z) = RG(z) - GH(z) C(z). \text{ Hieruit volgt } C(z) = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)}$$

zodat geldt:

$$C(z, m) = RG(z, m) - \frac{RG(z) GH(z, m)}{1 + GH(z)}. \quad (6-11)$$

6.7 BEPALING VAN DE OVERDRACHTSFUNKTIE VAN SYSTEMEN MET DODE TIJD

Indien de dode tijd gelijk is aan een geheel aantal malen de bemonsteringstijd kan met behulp van de verschuivingsregel worden afgeleid:

$$Z\{e^{-kpT} G(p)\} = z^{-k} Z\{G(p)\}$$

Systemen waarin een dode tijd aanwezig is die niet een geheel aantal malen de bemonsteringstijd bedraagt, kunnen goed met de gemodificeerde z -transformatie worden beschreven.

Voorbeeld 6.14

Bepaal de uitgang $c(t)$ op de bemonsteringstijdstippen van een proces met dode tijd, waaraan een eenheidstap wordt toegevoerd, zie fig. 6.18.

Stel $T = \ln 4$

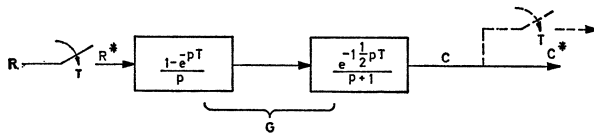


Fig. 6.18

$$C(z) = R(z) \cdot G(z)$$

Het is niet mogelijk $G(z)$ te bepalen daar de dode tijd $1\frac{1}{2}T$ is. Door aan te nemen dat de dode tijd T is en daarna de gemodificeerde z -transformatie te nemen met $\Delta = \frac{1}{2}$ dus $m = \frac{1}{2}$ wordt juist de gewenste informatie verkregen.

$$\begin{aligned} Z\left\{\frac{1-e^{-pT}}{p} \cdot \frac{e^{-1\frac{1}{2}pT}}{p+1}\right\} &= (1-z^{-1})z^{-1} Z_m\left\{\frac{1}{p(p+1)}\right\}_{m=\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{z-1}{z^2}\right) Z_m\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right\}_{m=\frac{1}{2}} = \left(\frac{z-1}{z^2}\right) \left\{\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-mT}}{z-e^{-T}}\right\}_{m=\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{z-1}{z^2}\right) \left\{\frac{1}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{4}}\right\} = \frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}{z^2(z-\frac{1}{4})} \\ C(z) &= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}{z^2(z-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}{z(z-1)(z-\frac{1}{4})} \end{aligned}$$

Door de noemer op de teller te delen wordt gevonden:

$$C(z) = \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{7}{8}z^{-3} + \dots$$

dus $c(0) = 0$, $c(T) = 0$, $c(2T) = \frac{1}{2}$, $c(3T) = \frac{7}{8}$ enz.

Indien dit proces wordt teruggekoppeld ontstaat het volgende schema: (fig. 6.19).

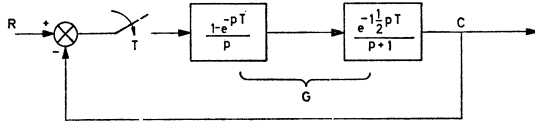


Fig. 6.19

Er geldt nu $C(z) = \frac{G(z) \cdot R(z)}{1 + G(z)}$

waarin $G(z)$ wordt gevonden zoals hiervoor aangegeven, dus als $z^{-1} G(z, m)$ met $m = \frac{1}{2}$

en

$$G(z, m) = Z_m \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p(p+1)} \right\}_{m=\frac{1}{2}} = (1 - z^{-1}) Z_m \left\{ \frac{1}{p(p+1)} \right\}_{m=\frac{1}{2}}$$

VII. Stabiliteit

7.1 INLEIDING

De stabiliteit van lineaire systemen met signaalbemonstering wordt op ongeveer gelijke wijze gedefiniëerd als de stabiliteit van continue systemen, (zie monografie I, hoofdstuk 6). Alleen worden van systemen met signaalbemonstering de signalen berekend op de bemonsteringstijdstippen. Hierdoor kunnen de verschijnselen, die optreden tussen deze bemonsteringstijdstippen aan de aandacht ontgaan. Er kunnen zogenaamde verborgen oscillaties optreden of één of meer signalen kunnen een oneindige waarde aannemen, de zogenaamde verborgen instabiliteit hetgeen in praktische gevallen het bereiken van een verzadigingswaarde betekent. Daarom kan het soms nodig zijn de signalen te bepalen op tussen de bemonsteringen gelegen tijdstippen.

Bij de methoden ter bepaling van de stabiliteit komen de volgende punten aan de orde:

- de betekenis van de stabiliteit
- de bruikbaarheid van de methode voor verschillende systemen
- de vraag of de methode een noodzakelijke en voldoende voorwaarde of slechts een voldoende voorwaarde inhoudt
- de informatie, die naast de stabiliteit kan worden verkregen
- de vorm waarin het systeem bekend dient te zijn.

Voor de betekenis van de stabiliteit worden de systemen onderscheiden in lineaire en niet-lineaire systemen met signaalbemonstering. Bij de lineaire systemen wordt meestal nog de beperking gemaakt, dat deze bovendien tijdonafhankelijk zijn. De stabiliteit is bij lineaire tijdonafhankelijke systemen een eigenschap van het systeem en dus onafhankelijk van de grootte van de ingangssignalen, van de tijd of van de beginvoorwaarden, waarin het systeem zich bevindt. Bij niet-lineaire systemen is de stabiliteit geen systeemeigenschap: de stabiliteit kan uitsluitend bepaald worden in de buurt van de evenwichtspunten waarin het systeem zich kan bevinden. De stabiliteit is dan vaak van een beperkter karakter, en heeft bijvoorbeeld betrekking op kleine verstoringen om het evenwichtspunt. Afhankelijk van de wijze waarop het evenwichtspunt wordt bereikt, zijn vele soorten stabiliteit gedefiniëerd. Bij lineaire tijdonafhankelijke systemen bestaat slechts één evenwichtspunt. De stabiliteit van dit punt bepaalt de stabiliteit van het systeem. Een lineair

tijdonafhankelijk systeem wordt stabiel genoemd als een eindige ingang leidt tot een eindige uitgang. Er wordt een uitzondering op deze definitie gemaakt voor een systeem met één integratie, dat als stabiel wordt beschouwd, terwijl de uitgang oneindig kan worden bij een eindige ingang.

Wat betreft de bruikbaarheid van de in dit hoofdstuk behandelde methoden kan worden opgemerkt dat slechts methoden ter sprake komen die speciaal voor systemen met signaalbemonstering zijn ontwikkeld of die, nadat een bilineaire transformatie is uitgevoerd, terug te voeren zijn tot methoden die ook voor continue systemen worden gebruikt.

Doordat slechts lineaire systemen worden beschouwd kan men stellen dat de methoden noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor stabiliteit geven. In dit hoofdstuk worden de zogenaamde directe methoden besproken die slechts uitsluitsel geven over de stabiliteit van het systeem. De indirecte methoden zoals de frekwentieresponsiemethode en de polen- en nulpuntenmethode geven veel meer informatie over het systeem en de stabiliteitsbepaling staat bij deze methoden niet voorop. De in dit hoofdstuk te bespreken methoden vereisen een mathematische beschrijving van het systeem in de vorm van een overdrachtsfunctie.

Lineaire tijdonafhankelijke systemen met signaalbemonstering kunnen worden beschreven door stelsels differentievergelijkingen met konstante coëfficiënten. Als de ingang x is en de uitgang y kan de differentievergelijking worden gebracht in de gedaante:

$$y(mT+kT) + b_1 y(mT+kT-T) + \dots + b_m y(kT) = a_0 x(nT+kT) + \dots + a_n x(kT) \text{ met } m \geq n. \quad (7-1)$$

Na toepassing van de z -transformatie en aannemende dat alle beginvoorwaarden nul zijn volgt:

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) X(z) = (z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m) Y(z)$$

$$\text{of } Y(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m} X(z) = H(z) X(z). \quad (7-2)$$

Als $X(z)$ eveneens beschreven kan worden door een eindig teller- en noemerpolynoom in z waarvan de wortels van het noemerpolynoom enkelvoudig zijn en niet samenvallen met de enkelvoudig veronderstelde wortels van het noemerpolynoom van $H(z)$ kan $Y(z)$ als volgt geschreven worden:

$$Y(z) = \frac{A_1 z}{z - p_1} + \frac{A_2 z}{z - p_2} + \dots = \sum_{i=1}^{m+r} \frac{A_i z}{z - p_i} \quad (7-3)$$

waarin r het aantal wortels van het noemer polynoom van $X(z)$ is. Voor $y(kT)$ wordt m.b.v. de inverse z -transformatie gevonden:

$$y(kT) = A_1 p_1^k + A_2 p_2^k + \dots = \sum_{i=1}^{m+r} A_i p_i^k. \quad (7-4)$$

Wil $y(kT)$ begrensd blijven voor elke waarde van k dan moet het ingangssignaal begrensd zijn dus $|p_i| \leq 1$ voor $i = m+1, \dots, m+r$.

Tevens moet gelden $|p_i| \leq 1$ voor $i = 1, 2, \dots, m$, d.w.z. alle polen van $H(z)$ moeten binnen de eenheidscirkel liggen in het z -vlak.

Indien er meervoudige wortels zijn geldt het gelijktteken niet. Uit een vergelijking van continue systemen en systemen met signaalbemonstering is het hierboven verkregen resultaat voor de ligging van de polen in het z -vlak eveneens te verkrijgen.

Zoals reeds is aangetoond wordt het linkerhalfvlak van p afgebeeld binnen de eenheidscirkel in het z -vlak (zie fig. 7.1).

Voor de stabiliteit is het van belang te weten of de polen in het p -vlak links of rechts van de imaginaire as liggen, d.w.z. in het z -vlak binnen of buiten de eenheidscirkel liggen.

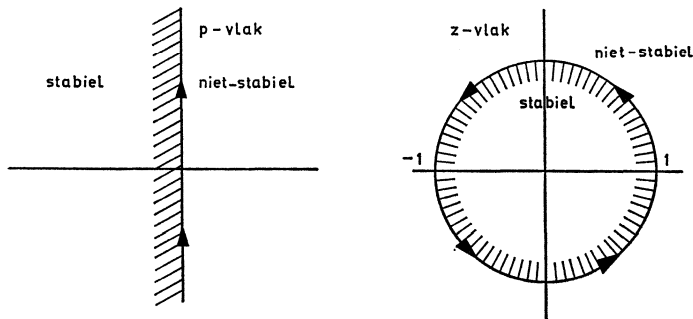


Fig. 7.1

7.2 DIREKTE METHODEN TER BEPALING VAN DE STABILITEIT

Hierbij worden methoden aangetroffen, die algemeen toe te passen zijn voor lineaire en niet-lineaire systemen met signaalbemonstering, zoals methoden volgens Liapunov en uitbreidingen hiervan en methoden, die uitsluitend gebruikt kunnen worden voor lineaire tijdonafhankelijke systemen. Hier wordt slechts op de laatstgenoemde methoden ingegaan.

Bij lineaire tijdonafhankelijke systemen wordt de stabiliteit bepaald uit de karakteristieke vergelijking van het systeem. Voor continue lineaire systemen zijn verschillende methoden gegeven om uit de coëfficiënten van de karakteristieke vergelijking te bepalen of de wortels in het linker- of het rechterdeel van het p -vlak liggen. De karakteristieke vergelijking moet bij de aldaar gegeven methoden een algebraïsche vergelijking zijn, d.w.z. een eindig polynoom in p . Als alle wortels van dit polynoom een negatief reëel deel hebben, wordt dit polynoom een Hurwitz-polynoom genoemd. Bij systemen

met signaalbemonstering wordt de overdrachtsfunctie echter gegeven door een transcendente vergelijking in p , omdat de factor e^{pT} hierin voorkomt. Door de transformatie $z = e^{pT}$ wordt weliswaar een algebraïsche vergelijking in z verkregen, doch de stabiliteitsgrens in het z -vlak is de eenheidscirkel, waardoor de voor continue systemen te gebruiken stabiliteitscriteria niet zonder meer zijn toe te passen.

Er zijn twee mogelijkheden, om toch via een directe methode de stabiliteit te bepalen:

1. de invoering van een transformatie, waarbij de karakteristieke vergelijking in z wordt getransformeerd naar een polynoom in een nieuwe variabele. Deze transformatie wordt zodanig gekozen dat de grens van stabiliteit gevormd wordt door de imaginaire as in het vlak van de nieuwe variabele. Dit is mogelijk m.b.v. een bilineaire transformatie.
2. de toepassing van nieuwe criteria, die aangeven of de wortels van een polynoom zich bevinden binnen of buiten de eenheidscirkel. Deze criteria kunnen worden toegepast op de karakteristieke vergelijking in z .

7.2.1 De bilineaire transformatie

Door de bilineaire transformatie $z = \frac{ax+b}{cx+d}$ wordt de eenheidscirkel in het z -vlak afgebeeld in de imaginaire as van het x -vlak, waarbij het inwendige van de eenheidscirkel overgaat in het linkerhalfvlak van het x -vlak.

In het bijzonder worden eenvoudige waarden voor a , b , c en d genomen en vooral bekend zijn de w -transformatie en de r -transformatie, waarbij

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{dus} \quad z = \frac{1+w}{1-w} \quad (7-5)$$

en

$$r = \frac{z+1}{z-1}, \quad \text{dus} \quad z = \frac{r+1}{r-1}. \quad (7-6)$$

In plaats van w en r worden in de literatuur soms andere symbolen gebruikt. Bovendien wordt ook wel de transformatie

$$z = \frac{1+w' \frac{T}{2}}{1+w' \frac{T}{2}} \text{ toegepast.}$$

Bekende lijnen in het p -vlak, zoals lijnen van konstante absolute of relatieve demping worden echter niet in rechte lijnen afgebeeld in het w - en het r -vlak. Het verband tussen het p -, z -, w - en r -vlak wordt weergegeven in fig. 7.2.

Voor de eenheidscirkel in het z -vlak geldt: $z = e^{j\omega T}$

$$\text{Hieruit volgt: } w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{e^{\frac{1}{2}j\omega T} (e^{+\frac{1}{2}j\omega T} - e^{-\frac{1}{2}j\omega T})}{e^{\frac{1}{2}j\omega T} (e^{\frac{1}{2}j\omega T} + e^{-\frac{1}{2}j\omega T})}$$

$$= j \frac{e^{\frac{1}{2}j\omega T} - e^{-\frac{1}{2}j\omega T}}{2j} \cdot \frac{2}{e^{\frac{1}{2}j\omega T} + e^{-\frac{1}{2}j\omega T}}$$

$$w = j \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega T.$$

Indien $w = \sigma_w + j\omega_w$ geldt dus

$$\omega_w = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega T. \quad (7-7)$$

De imaginaire as in het w -vlak komt dus juist overeen met de eenheidscirkel in het z -vlak.

Voor de r -transformatie geldt:

$$r = \frac{1}{w} = \frac{1}{j \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega T} = -j \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \omega T. \quad (7-8)$$

De imaginaire as in het r -vlak komt dus overeen met de eenheidscirkel in het z -vlak.

Nadat de karakteristieke vergelijking $F(z)$ getransformeerd is via de w - of r -transformatie naar $F(w)$ of $F(r)$ kan één van de methoden voor het stabi-

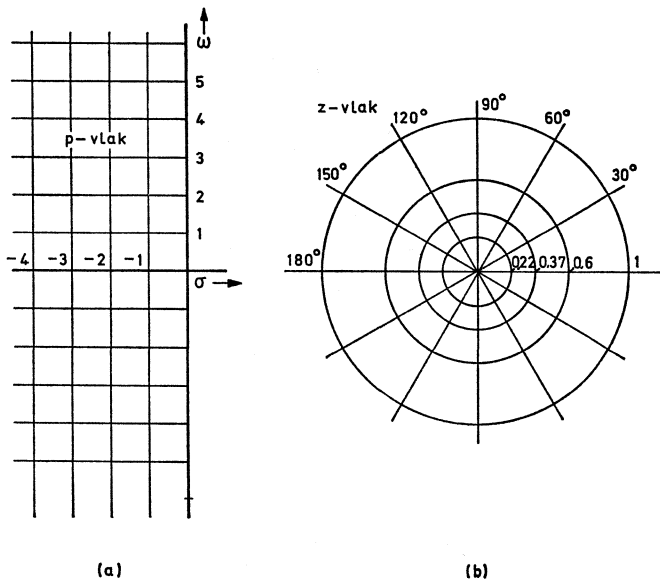
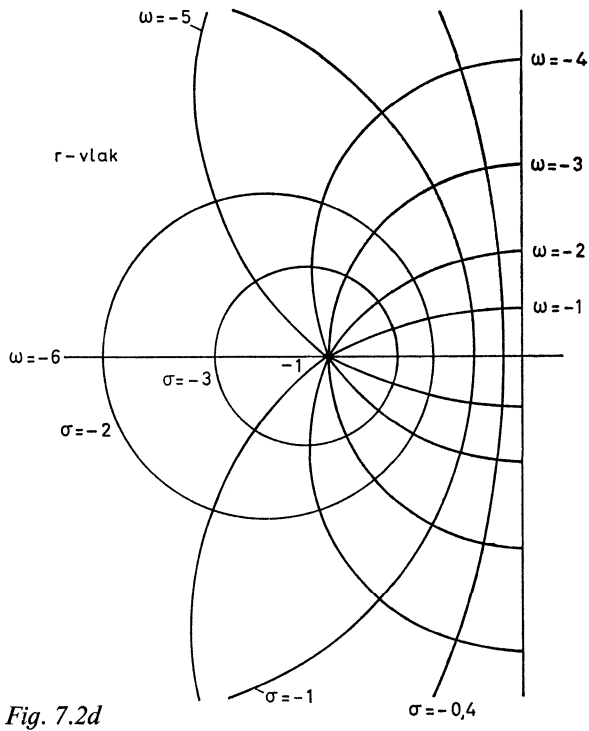
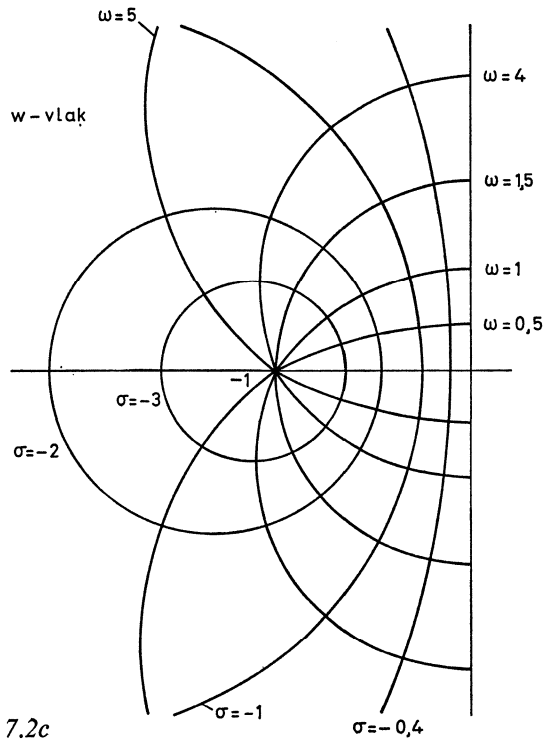


Fig. 7.2



liteitsonderzoek van continue lineaire systemen, zoals het Routh of het Hurwitz criterium, worden toegepast (zie hoofdstuk VI, monografie I).

Voorbeeld 7.1

Gegeven het systeem volgens fig. 7.3.

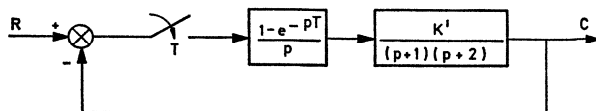


Fig. 7.3

$$G(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{K^1}{(p+1)(p+2)}. \text{ Stel } T = \ln 2 \text{ dan geldt:}$$

$$G(z) = \frac{\frac{1}{8} K^1 (z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

De karakteristieke vergelijking luidt:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{8} K^1 (z + \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4}) = 0 \\ &= z^2 + (\frac{1}{8} K^1 - \frac{3}{4})z + \frac{1}{16} K^1 + \frac{1}{8} = 0 \end{aligned}$$

$$F(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + (\frac{1}{8} K^1 - \frac{3}{4}) \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + \frac{1}{16} K^1 + \frac{1}{8} = 0$$

of:

$$\left(\frac{1.5}{8} - \frac{1}{16} K^1\right) w^2 + \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{8} K^1\right) w + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16} K^1\right) = 0.$$

Toepassing van het criterium van Routh levert de volgende getallenrijen:

$$\begin{array}{cc} \frac{1.5}{8} - \frac{1}{16} K^1 & \frac{3}{8} + \frac{3}{16} K^1 \\ \frac{7}{4} - \frac{1}{8} K^1 & 0 \\ \frac{3}{8} + \frac{3}{16} K^1 & 0 \end{array}$$

met $\frac{1.5}{8} - \frac{1}{16} K^1 > 0$, $\frac{7}{4} - \frac{1}{8} K^1 > 0$ en $\frac{3}{8} + \frac{3}{16} K^1 > 0$.

Het systeem is stabiel voor $-2 < K^1 < 14$.

De w - en r -transformaties worden ook gebruikt bij het tekenen van frequentie karakteristieken omdat de imaginaire as van het p -vlak wordt afgebeeld op de imaginaire as van het w - en van het r -vlak.

Bovendien kan het w -vlak en het r -vlak gebruikt worden om hierin polen en nulpunten aan te geven en poolbanen te tekenen. De interpretatie is echter niet eenvoudig en biedt meestal geen voordelen boven de interpretatie in het p -vlak of het z -vlak (zie fig. 7.2).

7.2.2 Kriteria voor de bepaling van wortels binnen de eenheidscirkel

De meest bekende criteria zijn die van Schur-Cohn en van Jury.

Deze criteria zijn direkt geschikt voor lineaire systemen met signaalbemonstering. De karakteristieke vergelijking behoeft niet extra getransformeerd te worden. Stel dat de karakteristieke vergelijking gegeven is door:

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (7-9)$$

Voor regelsystemen geldt dat a_n, a_{n-1}, \dots reële koëfficiënten zijn; het Schur-Cohn criterium geldt echter ook indien a_n, a_{n-1}, \dots complexe koëfficiënten zijn.

T.a.v. de methode van Schur-Cohn gaat men als volgt te werk. Stel n determinanten $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ op van de vorm:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & & a_{n-k+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & & \dots & a_0 & 0 & 0 & & a_n \\ \hline \bar{a}_n & 0 & & \dots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & & \dots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & & \bar{a}_{k-2} \\ \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & & \dots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & & \dots & \bar{a}_n & 0 & 0 & & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

waarin \bar{a}_k de gekonjugeerde is van a_k . (Indien a_k reëel is, geldt $\bar{a}_k = a_k$).

Voor $k = 1$ wordt de determinant $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ \bar{a}_n & \bar{a}_0 \end{vmatrix} = a_0 \bar{a}_0 - a_n \bar{a}_n = a_0^2 - a_n^2$

Voor $k = 2$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

Het Schur-Cohn criterium voor stabiliteit luidt dan:

Alle wortels van $F(z)$ liggen binnen de eenheidscirkel als $\Delta_k < 0$ voor k oneven en $\Delta_k > 0$ voor k even. Deze ongelijkheden moeten worden nagegaan

voor alle determinanten, dus voor n determinanten als $F(z)$ van de n^e graad is. Dit criterium geeft niet aan of er wortels op de eenheidscirkel liggen en hoeveel wortels buiten de eenheidscirkel liggen. In tegenstelling tot het Hurwitz criterium voor continue systemen, waarbij het aantal polen in de rechterhelft van het p -vlak gelijk is aan het aantal tekenwisselingen van de Hurwitzdeterminant. Dit criterium wordt bewezen in [7.1].

Indien het criterium van Schur-Cohn wordt toegepast op het voorbeeld 7.1 komt men reeds uit op het berekenen van de determinant van een 4×4 matrix.

Het is duidelijk dat deze methode zich meer leent voor een berekening met een computer.

T.a.v. de methode van Jury gaat men als volgt te werk.

Stel dat de karakteristieke vergelijking gegeven is door:

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

waarin $a_n > 0$

Stel de volgende tabel op:

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & a_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_1 & b_0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & c_{n-3} & c_{n-2} & & \\ c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdot & \cdot & c_1 & c_0 & & \end{array}$$

enzovoort.

Zet deze tabel door tot er $2n-3$ rijen zijn. De elementen b_k, c_k enzovoort, worden als volgt gedefiniëerd:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \text{ enz.}$$

Het Jury criterium voor stabiliteit luidt:

Alle wortels van $F(z)$ liggen binnen de eenheidscirkel als voldaan is aan de volgende voorwaarden:

1. $F(1) > 0$
2. $F(-1) > 0$ als n even, $F(-1) < 0$ als n oneven
3. Voor de absolute waarden van de eerste termen van $2n-3$ rijen moet gelden:

$$|a_0| < |a_n| \quad |b_0| > |b_{n-1}| \quad |c_0| > |c_{n-2}| \dots \text{enzovoort.}$$

Voor een bewijs van dit criterium wordt verwezen naar [7.2]. Dit criterium geeft niet aan of er wortels op de eenheidscirkel liggen en hoeveel wortels er buiten de eenheidscirkel liggen.

Voorbeeld 7.2

Op het voorbeeld 7.1 wordt het Jury-kriterium toegepast:

$$F(z) = z^2 + \left(\frac{1}{8}K^1 - \frac{3}{4}\right)z + \frac{1}{16}K^1 + \frac{1}{8} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{16}K^1 + \frac{1}{8}, a_1 = \frac{1}{8}K^1 - \frac{3}{4}$$

De voorwaarden zijn:

1. $F(1) > 0$ dus $1 + \left(\frac{1}{8}K^1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{16}K^1 + \frac{1}{8} > 0$
Hieruit volgt: $K^1 > -2$
2. $F(-1) > 0$ dus $1 - \left(\frac{1}{8}K^1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{16}K^1 + \frac{1}{8} > 0$
Hieruit volgt: $K^1 < 30$
3. De tabel bestaat maar uit één rij:
 $\frac{1}{16}K^1 + \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8}K^1 - \frac{3}{4} \quad 1$
 Er moeten gelden: $|a_0| < a_n$. Hieruit volgt:
 $|\frac{1}{16}K^1 + \frac{1}{8}| < 1$ en dit geeft de voorwaarden:
 $\frac{1}{16}K^1 + \frac{1}{8} < 1$ of $K^1 < 14$ en
 $-\frac{1}{16}K^1 - \frac{1}{8} < 1$ of $K^1 > -2$.
 Totaal geeft dit de voorwaarde: $-2 < K^1 < 14$.

7.3 VERBORGEN OSCILLATIES EN VERBORGEN INSTABILITEIT

In feite wordt het signaal slechts bepaald op de bemonsteringstijdstippen. Het is theoretisch mogelijk dat een zogenaamde verborgen instabiliteit optreedt met een frekwentie $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ indien het uitgangssignaal exact op de bemonsteringstijdstippen door nul gaat (zie fig. 7.4). Indien echter in een ander punt van de regelkring het signaal wordt bekeken is ten gevolge van een geringe fasedraaiing direkt te zien dat het systeem instabiel is.

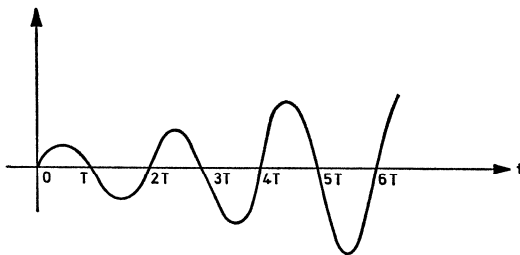


Fig. 7.4

Een veelvoorkomend verschijnsel is de verborgen oscillatie ('hidden oscillations' of 'intersampling ripple'), zie fig. 7.5.

Hierbij treden weliswaar gedempte oscillaties op, maar deze zijn niet te onderkennen indien men alleen het bemonsterde signaal beschouwt.

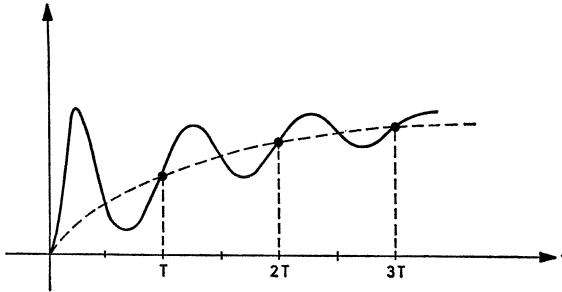


Fig. 7.5

Dit verschijnsel doet zich vooral voor bij systemen die ontworpen zijn met de zogenaamde minimum settling time methode, (zie hoofdstuk XIII). De bemonsteringsfrequentie f_s is in al die gevallen $2f_{0s}$, waarin f_{0s} de frequentie van de gedempte oscillatie is.

In vergelijking met continue systemen kunnen voorts nog de volgende punten worden opgemerkt.

1. De maximale opslinging van het overgangsverschijnsel kan zeer groot worden, terwijl deze bij continue systemen maximaal 100% bedraagt. Een aanvankelijk grote opslinging behoeft dus nog niet op een instabiel systeemgedrag te wijzen (zie fig. 7.5).
2. Een eerste orde teruggekoppeld bemonsterd systeem kan instabiel worden; dit is bij continue systemen onmogelijk tenzij er sprake is van positieve terugkoppeling.
3. Bij continue systemen wordt de regelkring sneller instabiel bij toenemende waarde van de dode tijd in het proces, indien de overige parameters van het proces en de regelaar niet gewijzigd worden.

Bij systemen met signaalbemonstering kan de grens van stabiliteit tijdelijk gunstiger worden bij toename van de dode tijd t.o.v. de bemonsteringstijd (zie voorbeeld 7.3).

Voorbeeld 7.3

Gegeven het teruggekoppelde systeem volgens fig. 7.6.

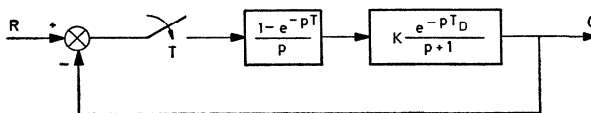


Fig. 7.6

Indien T_D varieert van 0 tot 1 sec. en $T = 1$ sec. wordt gekozen, kan de maximale waarde van K worden berekend waarbij het systeem stabiel is.

Als $H(z) = Z\left(\frac{1-e^{-pT}}{p} \frac{Ke^{-pT_D}}{p+1}\right)$ geldt met $m = 1 - T_D$

$$H(z) = K(1-z^{-1}) Z_m\left(\frac{1}{p(p+1)}\right) \text{ of}$$

$$H(z) = K \cdot \frac{z(1-e^{-m}) + e^{-m} - e^{-1}}{z(z-e^{-1})}.$$

De karakteristieke vergelijking luidt:

$$z^2 + z(K - Ke^{-m} - e^{-1}) + K(e^{-m} - e^{-1}) = 0.$$

Voor diverse waarden van $m = 1 - T_D$ kan de maximale waarde van K berekend worden waarvoor het systeem instabiel wordt. Deze waarde is in fig. 7.7 uitgezet.

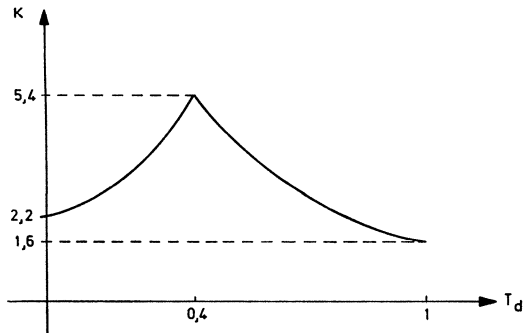


Fig. 7.7

Uit dit voorbeeld blijkt dat het mogelijk is door een gunstige waarde van T t.o.v. T_D te kiezen een bemonsterd systeem te stabiliseren.

VIII. Analyse in het frekwentiedomein

8.1 INLEIDING

De frekwentieresponsiemethode die uitvoerig behandeld is in monografie II voor continue systemen is ook zeer goed bruikbaar voor systemen met signaalbemonstering. De diverse frekwentiediagrammen (bode-, nicholsdiagram en polaire figuur) kunnen ook m.b.t. de in deze monografie behandelde systemen voor analyse en synthese worden toegepast. Bovendien gelden dezelfde regels voor de bepaling van de frekwentieresponsie van het gesloten systeem uit het open systeem en omgekeerd. (M en N lijnen, M_1 en N_1 lijnen, zie monografie II, hoofdstuk 3).

Er doen zich bij systemen met signaalbemonstering echter een tweetal komplikaties voor:

1. De frekwentiekarakteristiek van $G_1^*(j\omega) G_2^*(j\omega) \neq \{G_1(j\omega) G_2(j\omega)\}^*$, d.w.z. een wijziging in een van de overdrachtsfuncties G_1 of G_2 vereist een geheel nieuwe berekening van $\{G_1(j\omega) G_2(j\omega)\}^*$.
2. De frekwentiekarakteristiek van een bemonsterd systeem herhaalt zich.

$$\text{Er geldt immers } G^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(j\omega + jn\omega_s).$$

Dit houdt in dat in feite slechts de frekwentiekarakteristiek voor $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ hoeft te worden beschouwd. Meestal is de frekwentiekarakteristiek van $G(j\omega)$ bekend en dient men hieruit $G^*(j\omega)$ te bepalen. De gehele frekwentiekarakteristiek van $G(j\omega)$ speelt mee bij de bepaling van $G^*(j\omega)$ voor $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$.

Het probleem van de oneindige sommatie van termen kan men op drie manieren oplossen:

1. Het benaderen van de oneindige som door slechts een beperkt aantal termen mee te nemen.
2. Bepaling van de frekwentiekarakteristiek door $G(z)|_{|z|=1}$ te bepalen. De gevonden karakteristiek is exakt en kan het best op grafische wijze bepaald worden uit het polen- en nulpuntenbeeld (zie hoofdstuk IX).
3. Invoeren van een bilineaire transformatie. Er wordt dan een exakte frekwentiekarakteristiek verkregen voor $0 < \omega < \frac{\omega_s}{2}$. Het nadeel is dat niet direkt de gegevens van $X(j\omega)$ of $G(j\omega)$ gebruikt kunnen worden.

8.2 BENADERINGSMETHODEN

De hogere harmonischen in de bemonsterde signalen worden door het gebruik van een houdschakeling aanzienlijk gereduceerd. Verdere reductie van deze hogere harmonischen wordt verkregen door laagdoorlaatfilters. Het geregelde proces zelf heeft in het algemeen ook een laagdoorlaatkarakter.

Voorbeeld 8.1

Voor het systeem gegeven in fig. 8.1 geldt de relatie:

$$C(p) = G_1(p) G_2(p) E^*(p), E^*(p) = R^*(p) - \{G_1(p) G_2(p) H(p)\}^* E^*(p)$$

Hieruit volgt:

$$C(p) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(p + j\omega_s n) G_1(p) G_2(p)}{1 + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_1 G_2 H(p + j\omega_s n)}$$

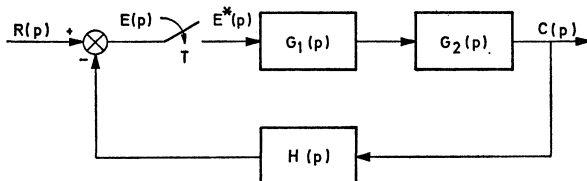


Fig. 8.1

Met de veronderstelling dat $G_1(p) G_2(p)$ en $G_1(p) G_2(p) H(p)$ beide een laagdoorlaatkarakteristiek hebben, kan men de reeks in de noemer van $C(p)$ vrij goed benaderen door slechts enkele termen (b.v. $n = 0$, $n = \pm 1$, $n = \pm 2$) te nemen en de rest te verwaarlozen.

Stabiliteitsonderzoek kan direkt met behulp van het Nyquist criterium gebeuren. De polaire figuur van $\{G_1 G_2 H(j\omega)\}^*$ wordt hierbij benaderd door

slechts enkele termen van de reeks $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_1 G_2 H(j\omega + j\omega_s n)$ mee te nemen.

De belangrijkste termen in deze reeks zijn die voor $n = 0$ en $n = -1$. Wordt voor de eenvoud gesteld: $G(j\omega) = G_1(j\omega) G_2(j\omega) H(j\omega)$ dan geldt:

$$G^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(j\omega + jn \omega_s). \quad (8-1)$$

Voor $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ eindigt de frekwentiekarakteristiek van $G^*(j\omega)$ altijd op de reële as. Er geldt immers:

$$\begin{aligned}
 G^*\left(j\frac{\omega_s}{2}\right) &= \frac{1}{T} \left\{ G\left(j\frac{\omega_s}{2}\right) + G\left(j\frac{\omega_s}{2} + j\omega_s\right) + G\left(j\frac{\omega_s}{2} - j\omega_s\right) + \right. \\
 &\quad \left. + G\left(j\frac{\omega_s}{2} + 2j\omega_s\right) + G\left(j\frac{\omega_s}{2} - 2j\omega_s\right) + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ G\left(j\frac{\omega_s}{2} + jn\omega_s\right) + G\left(-j\frac{\omega_s}{2} - jn\omega_s\right) \right\}
 \end{aligned}$$

Er blijft bij deze sommatie één term: $\lim_{k \rightarrow \infty} G(j\omega + kj\omega_s)$ over, maar deze term mag men nul veronderstellen voor elk fysisch systeem.

Daar $G\left(j\frac{\omega_s}{2} + jn\omega_s\right) + G\left(-j\frac{\omega_s}{2} - jn\omega_s\right)$ een reële grootte is, geldt tevens dat $\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ G\left(j\frac{\omega_s}{2} + jn\omega_s\right) + G\left(-j\frac{\omega_s}{2} + jn\omega_s\right) \right\}$ reëel is. (8-2)

Voorbeeld 8.2

Gegeven de frekwentiekarakteristiek volgens fig. 8.2 van $G(j\omega)$.

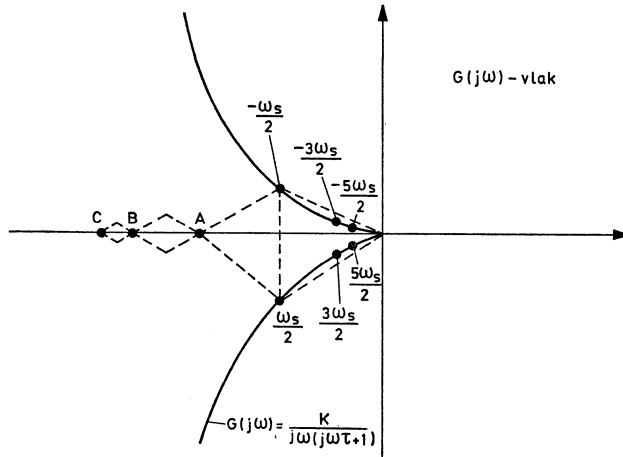


Fig. 8.2

Voor de frekwentie $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ is A de benaderde frekwentiekarakteristiek van $G^*\left(j\frac{\omega_s}{2}\right)$ indien slechts 2 termen worden meegegeven ($n = 0$ en $n = -1$).

Punt B is de benadering die wordt gevonden door 4 termen mee te nemen ($n = 0, 1, -1, -2$); in punt C zijn 6 termen meegenomen.

Aangenomen wordt dat $T = 1$ sec. Anders dient met de gevonden waarden nog met $\frac{1}{T}$ te vermenigvuldigen.

Alleen in het geval $G(j\omega)$ in frekwentie begrensd, is ($0 \leq \omega \leq \omega_c$) met $\omega_c < \frac{\omega_s}{2}$, zal de frekwentiekarakteristiek van $G^*(j\omega)$ voor $0 < \omega < \frac{\omega_s}{2}$ dezelfde zijn als van $G(j\omega)$ en dus in de oorsprong eindigen. Dit is echter zelden het geval zodat de $G^*(j\omega)$ karakteristiek altijd op de positieve of negatieve reële as van het $G^*(j\omega)$ vlak zal eindigen.

Indien de bemonsteringsfrekwentie relatief hoog is t.o.v. de dynamische eigenschappen van het systeem en alle elementen in de regelkring een sterk laagdoorlaatkarakter hebben kan men zelfs een zodanige grove benadering toepassen dat men alleen de term $n = 0$ uit de reeks

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(j\omega + jn\omega_s) \text{ meeneemt.}$$

Indien deze benadering wordt toegepast in voorbeeld 8.1 en men aanneemt dat $G_1(p)$ de overdrachtsfunctie van een nulde orde houdschakeling is en $H(p) = 1$ is, ontstaat de volgende uitdrukking voor $C(p)$:

$$C(p) = \frac{\frac{1}{T} \frac{1 - e^{-pT}}{p} G_2(p) R(p)}{1 + \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-pT}}{p} G_2(p)}.$$

De frekwentiekarakteristiek van het open systeem wordt dus bepaald door:

$$\frac{1}{T} \frac{1 - e^{-pT}}{p} G_2(p) = G(p) \quad \text{of} \quad G(j\omega) = \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} G_2(j\omega).$$

Er geldt echter (zie hoofdstuk III):

$$\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T e^{-\frac{1}{2}j\omega T} \frac{\sin \frac{1}{2}\omega T}{\frac{1}{2}\omega T}. \quad (8-3)$$

Voor lage frekwenties: $\omega \ll \omega_s$ gaat deze uitdrukking bij goede benadering over in $T e^{-\frac{1}{2}j\omega T}$, zodat $G(j\omega)$ benaderd kan worden door:

$$G(j\omega) = \frac{1}{T} T e^{-\frac{1}{2}j\omega T} G_2(j\omega) = e^{-\frac{1}{2}j\omega T} G_2(j\omega). \quad (8-4)$$

Het effect van de schakelaar en de houdschakeling is nu verdiskonteerd in een dode tijd van $\frac{1}{2}T$ sec.

In de frekwentiekarakteristiek heeft deze dode tijd slechts een invloed op de fase van de karakteristiek.

Het blokschema van fig. 8.3a gaat over in het blokschema van fig. 8.3b.

Hiermee is het systeem met signaalbemonstering bij benadering overgegaan in een kontinu systeem, zodat op dit benaderde systeem alle analyse en ontwerpmethoden kunnen worden toegepast die gelden voor continue systemen.

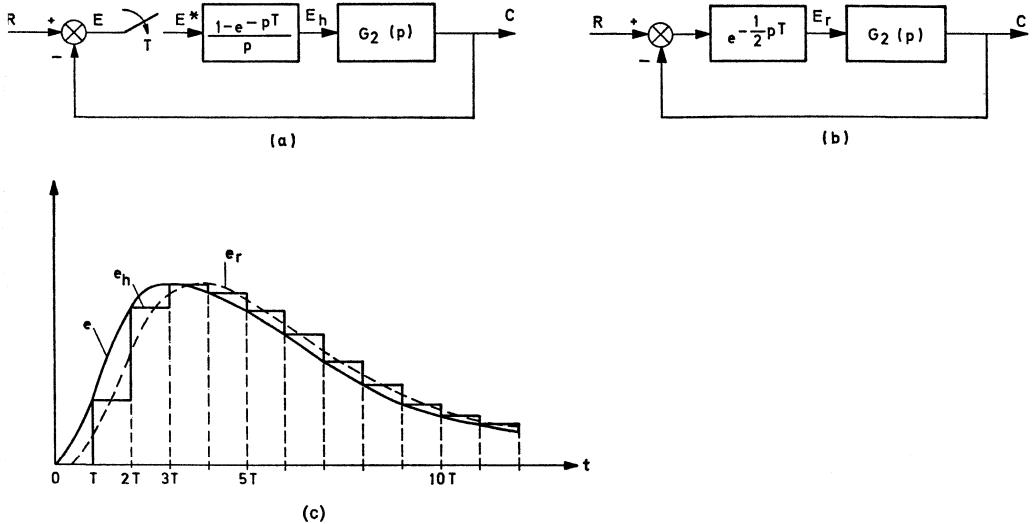


Fig. 8.3

Ook in het tijddomein is te zien dat de hierboven gegeven benadering redelijk is. In fig. 8.3c zijn zowel de signalen e , e_h als e_r aangegeven voor het geval de terugkoppeling wordt verbroken.

8.3 EXAKTE BEPALING VAN DE FREKWENTIEKARAKTERISTIEKEN

Exakte bepaling van de frekwentiekarakteristiek van een systeem met signaalbemonstering is mogelijk door gebruik te maken van de z -transformatie of een bilineaire transformatie. De imaginaire as in het gesterde p -vlak gaat over in de eenheidscirkel in het z -vlak. Langs deze cirkel geldt de relatie $z = e^{pT}$ of $\arg z = \omega T$, d.w.z. voor $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ neemt ω lineair toe langs de eenheidscirkel in het z -vlak.

Uit het polen- en nulpuntenbeeld is de frekwentiekarakteristiek te bepalen door de eenheidscirkel te doorlopen.

De grafische bepaling van de frekwentiekarakteristiek uit het polen- en nulpuntenbeeld wordt behandeld in het volgende hoofdstuk.

Met behulp van een bilineaire transformatie is het mogelijk de eenheidscirkel in het z -vlak af te beelden in de imaginaire as van een nieuw vlak. In

het vorige hoofdstuk zijn reeds de w - en r -transformatie geïntroduceerd. In dit hoofdstuk wordt tevens de w' -transformatie geïntroduceerd.

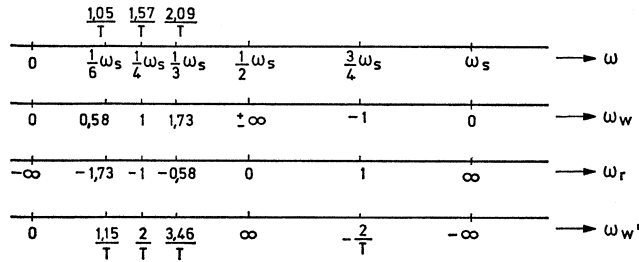


Fig. 8.4

Tussen w - en r enerzijds en z anderzijds bestaan de volgende relaties:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{of} \quad \omega_w = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega T \quad (8-5)$$

$$r = \frac{z+1}{z-1} \quad \text{of} \quad \omega_r = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \omega T. \quad (8-6)$$

Voor de bilineaire transformatie $w' = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ of $z = \frac{1 + \frac{T}{2} w'}{1 - \frac{T}{2} w'}$ kan worden

$$\text{afgeleid: } \omega_{w'} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega T. \quad (8-7)$$

Voor lage frekwenties geldt: $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega T \approx \frac{1}{2} \omega T$, zodat $\omega_{w'} \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \omega T = \omega$.

De w' -transformatie wordt o.a. gebruikt voor de simulatie van continue systemen m.b.v. een digitale rekenmachine [8.1].

In fig. 8.4 is het verband tussen ω , ω_w , ω_r en $\omega_{w'}$ aangegeven. De in praktijk meest toegepaste transformatie is de w -transformatie omdat de schaal voor het van belang zijnde frekwentiegebied $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ eveneens toeneemt, in tegenstelling tot de r -transformatie en onafhankelijk van de bemonsteringstijd is.

De w' transformatie heeft het voordeel dat de frekwentiekarakteristieken voor ω en $\omega_{w'}$ voor lage frekwenties gelijk zijn.

De ontbinding in de basisfactoren $K, \frac{1}{j\omega_w}, \frac{1}{j\omega_w \tau + 1}$ en

$$\left\{ \left(\frac{j\omega_w}{\omega_n} \right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega_w + 1 \right\}^{-1}$$

en de inversen hiervan vereenvoudigt het tekenen van bodediagrammen (zie monografie II).

Voorbeeld 8.3

Bepaal de frekwentiekarakteristiek van het open systeem (zie fig. 8.5).

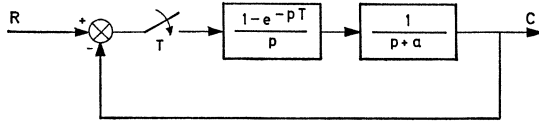


Fig. 8.5

$$\text{Stel } H(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{1}{p+a}. \text{ Hieruit volgt: } H(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}.$$

$$\text{Stel } a = 1 \text{ en } T = \ln 2 \text{ dan geldt: } H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}.$$

Toepassing van de w -transformatie levert:

$$H(w) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+w}{1-w} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1-w)}{(1+w) - \frac{1}{2}(1-w)} = \frac{(1-w)}{(1+3w)}$$

$$\text{of } H(j\omega_w) = \frac{1 - j\omega_w}{1 + 3j\omega_w}.$$

De basisfactoren zijn: $1 - j\omega_w$ en $\frac{1}{1 + 3j\omega_w}$.

De breekpunten liggen bij $\omega_w = 1$ resp. $\omega_w = \frac{1}{3}$.

Het min-teken in $(1 - j\omega_w)$ duidt op een niet-minimum fasekarakter (zie hoofdstuk 2, paragraaf 3, monografie II) $\text{mod}(1 - j\omega_w) = (1 + \omega_w^2)^{\frac{1}{2}}$ en

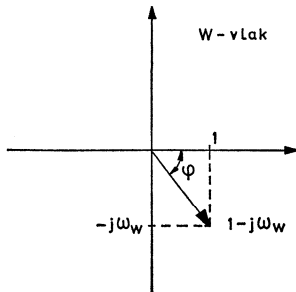


Fig. 8.6

$\arg(1 - j\omega_w) = -\arctg \omega_w$; voor $0 \leq \omega_w < \infty$, verloopt $\arg(1 - j\omega_w)$ van 0 tot -90° .

Dit is ook eenvoudig in te zien uit fig. 8.6.

Het bodediagram kan worden opgebouwd uit de twee basisfactoren:

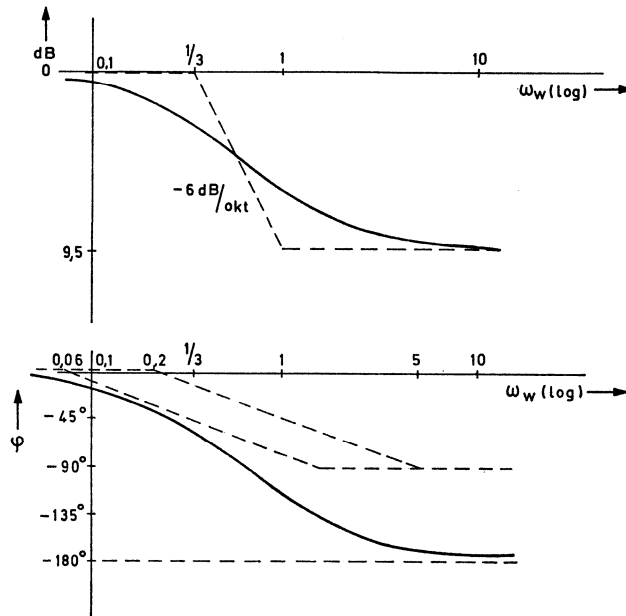


Fig. 8.7

Vooruitlopend op hetgeen nog in hoofdstuk X besproken zal worden over het ontwerpen van systemen met signaalbemonstering, blijkt uit dit voorbeeld duidelijk het effect van de bemonstering op de stabiliteit. Een extra versterking met een factor groter dan 3 zal de gehele modulus karakteristiek boven de 0dB -lijn brengen. Het teruggekoppelde systeem zal dan instabiel worden vanwege de fasedraaiing van -180° . Bij continue teruggekoppelde systemen van de eerste orde kan dit verschijnsel niet optreden.

Voorbeeld 8.4

Bepaal de frekwentiekarakteristiek van het open systeem (zie fig. 8.8). Stel $T = \ln 2$.

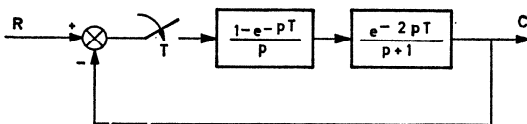


Fig. 8.8

$$H(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{e^{-2pT}}{p+1} \quad \text{en} \quad H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z^2(z - \frac{1}{2})}$$

Toepassing van de w -transformatie geeft:

$$H(w) = \frac{(1-w)^2}{(1+w)^2} \cdot \frac{(1-w)}{1+3w}$$

of $H(j\omega_w) = \frac{(1-j\omega_w)^3}{(1+j\omega_w)^2(1+3j\omega_w)}$.

De basisfactoren zijn $(1-j\omega_w)$, $\frac{1}{(1+j\omega_w)}$ en $\frac{1}{(1+3j\omega_w)}$.

De breekpunten liggen bij $\omega_w = 1$, $\omega_w = 1$ en $\omega_w = \frac{1}{3}$.

Het bodediagram opgebouwd uit deze basisfactoren wordt:

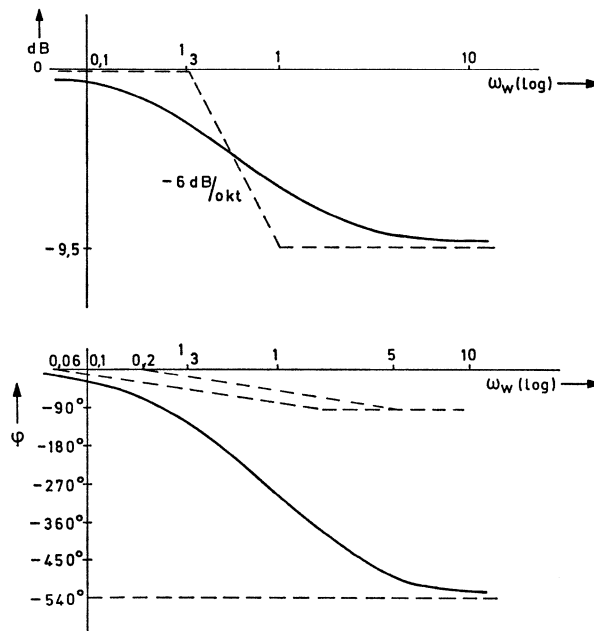


Fig. 8.9

Tengevolge van de dode tijd van $2T$ is de modulus karakteristiek ongewijzigd gebleven t.o.v. de modulus karakteristiek (voorbeeld 8.3) maar de fasekarakteristiek is aanzienlijk veranderd. Elke dode tijd ter grootte van de bemonsteringstijd veroorzaakt een term $\frac{1-j\omega_w}{1+j\omega_w}$ en zorgt dus voor een fase-draaiing van -180° bij $\omega_w \rightarrow \infty$ (bij $\omega_w = 1$ een fase-draaiing van -90°).

Voorbeeld 8.5

Gegeven het blokschema volgens fig. 8.10. Stel $T = \ln 4$ en $0 < \Delta < 1$.

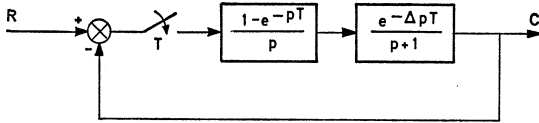


Fig. 8.10

De open lus overdrachtsfunctie wordt bepaald door:

$$Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{e^{-\Delta pT}}{p+1} \right\} = \frac{z-1}{z} Z_{m=1-\Delta} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right\}$$

$$= \frac{z-1}{z} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^m}{z-\frac{1}{4}} \right) = \frac{z(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m) + \left(\frac{1}{4}\right)^m - \frac{1}{4}}{z(z - \frac{1}{4})}$$

$$H(w) = \frac{(1-w)(1+\alpha w)}{(1+w)(1+\frac{5}{3}w)}$$

$$\text{met } \alpha = \frac{4}{3} \left[\frac{5}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^m \right] = \frac{5}{3} - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^m$$

Voor $m = 0, \frac{1}{2}, 1$ dus voor $\Delta = 1, \frac{1}{2}$ resp. 0 worden de volgende bodediagrammen gevonden:

$$H(j\omega_w) = \frac{(1-j\omega_w)^2}{(1+j\omega_w)(1+\frac{5}{3}j\omega_w)} \quad \text{voor } m = 0$$

$$H(j\omega_w) = \frac{(1-j\omega_w)(1+\frac{1}{3}j\omega_w)}{(1+j\omega_w)(1+\frac{5}{3}j\omega_w)} \quad \text{voor } m = \frac{1}{2}$$

$$H(j\omega_w) = \frac{(1-j\omega_w)}{1+\frac{5}{3}j\omega_w} \quad \text{voor } m = 1 \quad (\text{zie fig. 8-11})$$

Hierin is de geleidelijke overgang van de karakteristieken te zien bij toename van Δ . Alleen voor hoge frekventies treedt een abrupte overgang op van $\Delta < 1$ naar $\Delta = 1$ in de fasekarakteristiek.

Voorbeeld 8.6

Laat de open lus overdrachtsfunctie van een systeem gegeven zijn door:

$$G_{ho} G(z) = \frac{K(z+0,717)}{(z-1)(z-0,368)}; \text{ dit is de } z\text{-transformatie van}$$

$$H(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{K}{p(p+1)} \quad \text{met } T = 1$$

Toepassing van de w -transformatie geeft:

$$H(w) = K \cdot \frac{\left(\frac{1+w}{1-w} + 0,717\right)}{\left(\frac{1+w}{1-w} - 1\right)\left(\frac{1+w}{1-w} - 0,368\right)}$$

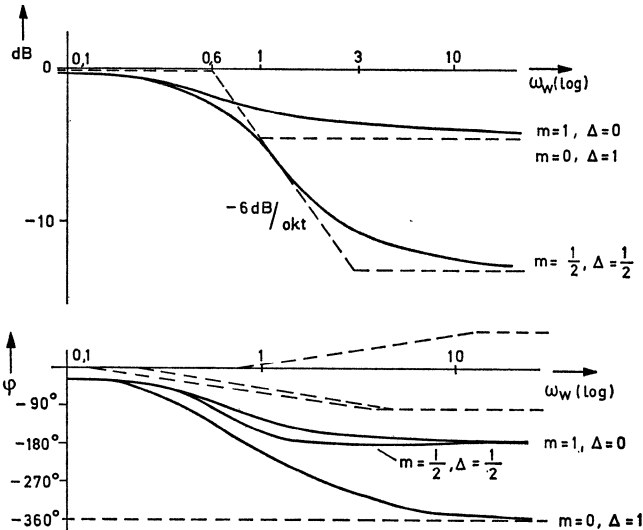


Fig. 8.11

De frekwentieresponsie kan worden bepaald uit:

$$H(j\omega_w) = \frac{K(1,717)}{2(0,632)} \cdot \frac{(1-j\omega_w)\left(1 + \frac{0,283}{1,717}j\omega_w\right)}{j\omega_w\left(1 + \frac{1,368}{0,632}j\omega_w\right)}$$

Het bodediagram is weergegeven in fig. 8.12 voor $K = 0,5$.

Uit de voorgaande voorbeelden zijn de volgende algemene konklusies te trekken t.a.v. de vorm van de frekwentiekarakteristiek van $H(j\omega_w)$.

1. De frekwentiekarakteristiek $H^*(j\omega)$ voor $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ komt overeen met de frekwentiekarakteristiek $H(j\omega_w)$ voor $0 \leq \omega_w \leq \infty$.
2. Behalve voor enkele uitzonderingsgevallen (systemen met een begrensd frekwentiespektrum) gaat $|H(j\omega_w)|$ voor toenemende ω_w vlak lopen (helling 0 dB/oktaaf). Dit is verklaarbaar omdat voor $H^*\left(j\frac{\omega_s}{2}\right)$ een eindige waarde wordt gevonden. De graad van het teller- en noemer-

polynoom van $H(w)$ is gelijk en komt overeen met de graad van het noemerpolynoom van $H(z)$.

3. De fasekarakteristiek van $H(j\omega_w)$ nadert tot 0° of tot een geheel aantal malen -180° voor $\omega_w \rightarrow \infty$.
4. In $H(j\omega_w)$ treden vaak niet-minimum fase termen op.

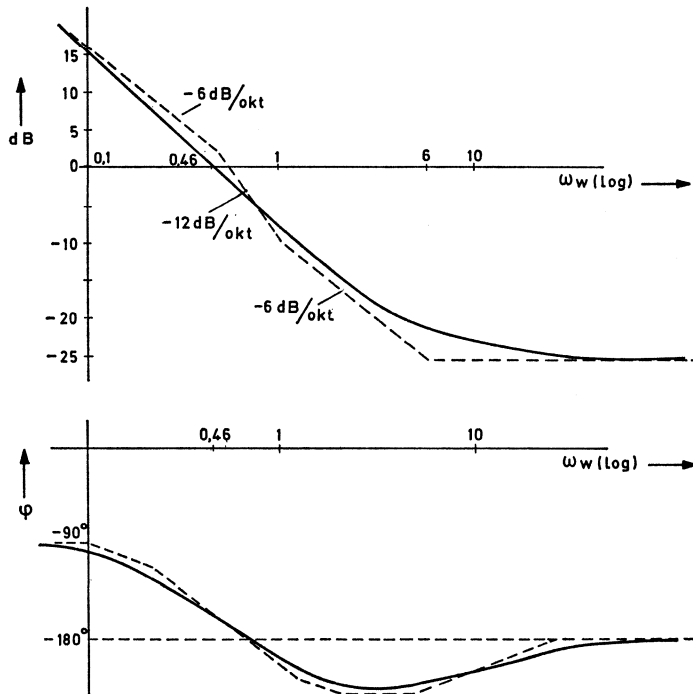


Fig. 8.12

5. Een dode tijd $T_D = kT$ waarin k een geheel getal is, geeft een bijdrage $\left(\frac{1-j\omega_w}{1+j\omega_w}\right)^k$ tot $H(j\omega_w)$, zodat voor $\omega_w \rightarrow \infty$ een fasebijdrage van $k(-180^\circ)$ en voor $\omega_w = 1$ een fasebijdrage van $k(-90^\circ)$ verwacht kan worden t.g.v. deze dode tijd. De dode tijd heeft geen invloed op de moduluskarakteristiek.

Indien de dode tijd niet een geheel aantal malen de bemonsteringstijd is wordt zowel de fase- als de moduluskarakteristiek door deze dode tijd beïnvloed.

IX. Analyse met behulp van de polen- en nulpuntenmethode

9.1 INLEIDING

Indien van een systeem met signaalbemonstering de polen en nulpunten in het gesterde p -vlak bekend zijn is het in principe mogelijk hiervan uitgaande tijdresponsies (overgangsverschijselen) en frekwentieresponsies te bepalen. Tengevolge van het feit dat het aantal polen en nulpunten oneindig groot wordt vanwege de herhaling van het polen- en nulpuntenbeeld in de sekundaire stroken is het onmogelijk in de meeste gevallen uit te gaan van het gesterde p -vlak en dient men uit te gaan van het z -vlak.

Bovendien kan op eenvoudige wijze het polen- en nulpuntenbeeld in het z -vlak van het gesloten systeem bepaald worden (poolbaanmethode). De tranformatie $z = e^{pT}$ is een éénduidige tranformatie.

Een punt in het p -vlak wordt afgebeeld in één punt in het z -vlak terwijl een punt in het z -vlak het beeldpunt is van oneindig veel punten uit het p -vlak:

Het is geen één-éénduidige tranformatie.

Uit:

$$\begin{aligned} H(z) = H^*(p) \Big|_{p=\frac{1}{T} \ln z} &= \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N^1(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{-T(p-\xi_n)}} \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{T(\xi_n)}{N^1(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{\xi_n T} z^{-1}} \end{aligned} \quad (9-1)$$

volgt eveneens dat de beeldpunten van de polen $H^*(p)$ in het p -vlak, in het z -vlak de polen van $H(z)$ zijn. De nulpunten van $H(z)$ zijn niet te vinden door tranformatie van de nulpunten van $H^*(p)$.

Door toepassing van de z -tranformatie is een overdrachtsfunctie in z ontstaan met een eindig aantal polen en nulpunten, zelfs voor systemen met dode tijd. Dit maakt de analyse van systemen met signaalbemonstering waarin dode tijd aanwezig is, eenvoudiger dan de analyse van continue systemen met dode tijd. Dit geldt met name voor de poolbaanmethode. Met behulp van de polen- en nulpuntenkonfiguratie in het z -vlak is het mogelijk te bepalen:

1. De frekwentiekarakteristieken van het open of gesloten systeem.
2. Overgangsverschijselen van het open of gesloten systeem indien de polen- en nulpuntenkonfiguratie van het ingangs- of stoorsignaal ook bekend is.

3. De poolbaan voor het gesloten systeem indien de polen en nulpunten van het open systeem bekend zijn.

Aandacht zal worden besteed aan de invloed van de ligging van polen in bepaalde delen van het door de eenheidscirkel omsloten gebied.

9.2 FREKWENTIEKARAKTERISTIEKEN UIT POLEN EN NULPUNTEN

Voor het bepalen van de frekwentiekarakteristieken van $H^*(p)$ kan $H(z)$ worden beschouwd voor $|z| = 1$.

$$H(z) = K^1 \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}{\prod_{j=1}^m (z - p_j)} \quad \text{met } m \geq n. \quad (9-2)$$

De frekwentiekarakteristiek voor continue systemen wordt bepaald door $p = j\omega$ te stellen en in het p -vlak de imaginaire as te doorlopen.

In het z -vlak wordt de eenheidscirkel doorlopen, waarbij de volgende punten van het p -vlak en het z -vlak met elkaar overeenstemmen.

$$\left. \begin{array}{l} \arg. z = 0 \quad \omega = n\omega_s \\ \arg. z = 45^\circ \quad \omega = \omega_s/8 + n\omega_s \\ \arg. z = 90^\circ \quad \omega = \omega_s/4 + n\omega_s \\ \arg. z = 180^\circ \quad \omega = \omega_s/2 + n\omega_s \\ \arg. z = 270^\circ \quad \omega = 3\omega_s/4 + n\omega_s \end{array} \right\} \text{ met } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

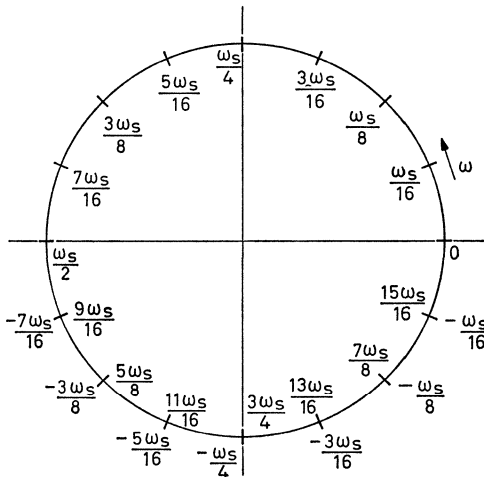


Fig. 9.1

De waarde van ω wordt gevonden als een parameter langs de eenheidscircel in het z -vlak die lineair toeneemt (fig. 9.1).

Voor $z = e^{j\omega T}$ gaat (9-2) over in:

$$H(z) = H(e^{j\omega T}) = K^1 \frac{\prod_{i=1}^n (e^{j\omega T} - z_i)}{\prod_{j=1}^m (e^{j\omega T} - p_j)} \quad (9-3)$$

Dus $H^*(j\omega) = H(e^{j\omega T})$

$$= K^1 \frac{\text{product van alle vectoren van de nulpunten naar } e^{j\omega T}}{\text{product van alle vectoren van de polen naar } e^{j\omega T}}$$

Voorbeeld 9.1

Bepaal de frekwentiekaracteristiek van $H(z) = \frac{K^1 z}{z - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$ (zie fig. 9.2).

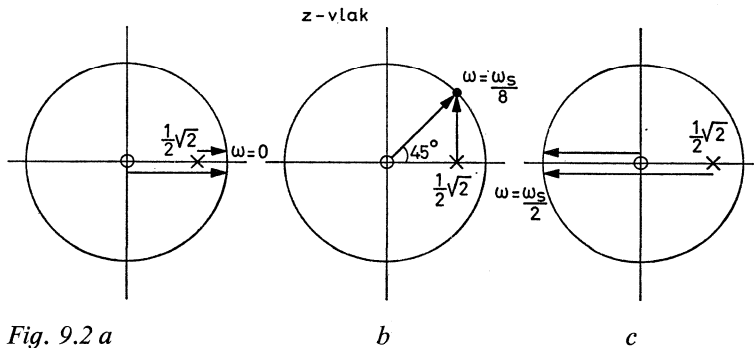


Fig. 9.2 a

b

c

Voor $\omega = 0$ geldt: $H^*(j0) = K^1 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$ (zie fig. 9-2a).

Voor $\omega = \frac{\omega_s}{8}$ geldt:

$$H^*\left(j\frac{\omega_s}{8}\right) = K^1 \frac{1 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}}} = K^1 \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (\text{zie fig. 9-2b})$$

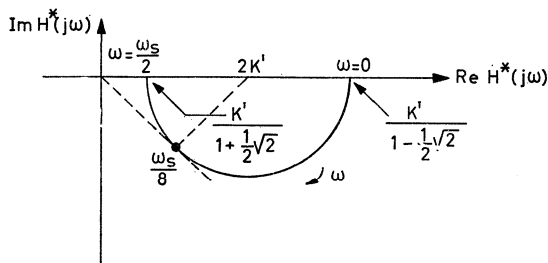


Fig. 9.3

Voor $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ geldt:

$$H^* \left(j \frac{\omega_s}{2} \right) = K^1 \frac{1 \cdot e^{j\pi}}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})e^{+j\pi}} = K^1 \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \quad (\text{zie fig. 9-2c})$$

In fig. 9.3 is de polaire figuur van $H^*(j\omega)$ uitgezet voor $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ en $K^1 = 1$. Zoals te verwachten was eindigt de frekwentiekarakteristiek op de reële as van het $H^*(j\omega)$ -vlak.

Voorbeeld 9.2

Bepaal de frekwentiekarakteristiek van $H(z) = \frac{1}{8} \frac{(z + \frac{1}{2})}{z(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$ zie (Fig. 9.4).

Dit is de z -getransformeerde van $H(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{e^{-pT}}{(p+1)(p+2)}$ met $T = \ln 2$,

dus van een tweede orde systeem met dode tijd $T = T_D$, voorafgegaan door een houdschakeling.

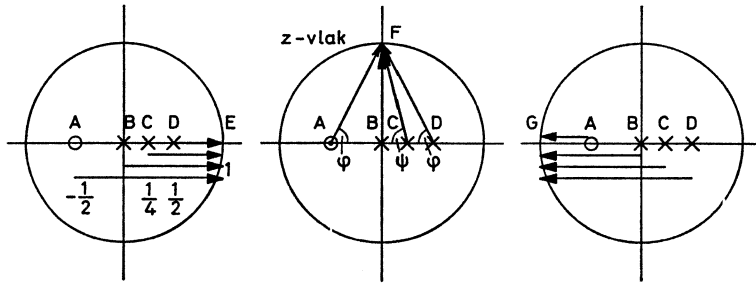


Fig. 9.4

$$H^*(j0) = \frac{1}{8} \frac{\overline{AE}}{\overline{BE} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{DE}} = \frac{1}{2}$$

$$H^* \left(j \frac{\omega_s}{4} \right) = \frac{1}{8} \frac{\overline{AF}}{\overline{BF} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{DF}} = \frac{1}{2\sqrt{17}} e^{j(-\frac{3}{2}\pi + 2\phi + \psi)} \approx \frac{1}{8} e^{-j\alpha} \text{ met } \alpha \approx -250^\circ$$

$$H^* \left(j \frac{\omega_s}{2} \right) = \frac{1}{8} \frac{\overline{AG}}{\overline{BG} \cdot \overline{CG} \cdot \overline{DG}} = \frac{1}{30}$$

Indien de frekwentieresponsie van $\omega = 0$ tot $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ is bepaald, wordt de frekwentiekarakteristiek van $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ tot $\omega = \omega_s$ gevonden door de fre-

kwentiekarakteristiek van $\omega = 0$ tot $\omega = \frac{\omega_s}{2}$, te spiegelen t.o.v. de reële as (fig. 9.5).

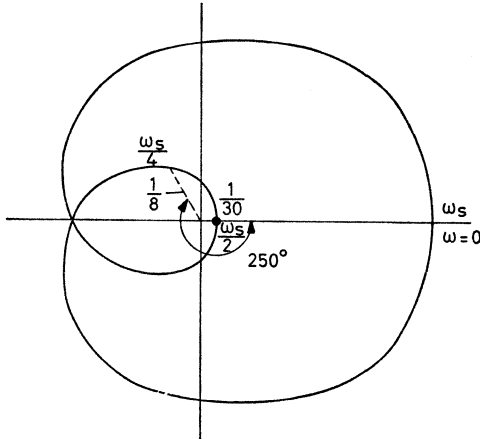


Fig. 9.5

De frekwentiekarakteristiek eindigt voor $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ op de reële as; de fase-draaiing bedraagt dan -360° waarvan -180° afkomstig is van de dode tijd.

9.3 OVERGANGSVERSCHEIJNSELEN UIT HET POLEN- EN NULPUNTENBEELD

De uitgang van een systeem kan afhankelijk van de plaats van de schakelaar

geschreven worden als $C(z) = R(z) H(z)$, zie fig. 9.6a waarin $H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$ of als $C(z) = R G_1(z) H(z)$, zie fig. 9.6b waarin $H_1(z) = \frac{G_2(z)}{1 + G_1 G_2(z)}$. Het is

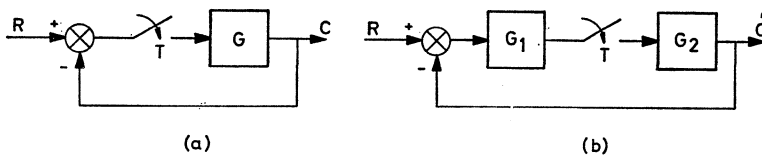


Fig. 9.6

dus niet altijd mogelijk het ingangssignaal te scheiden van de rest van het systeem.

Voor het geval $C(z) = R(z) H(z)$ kan geschreven worden

$$C(z) = K^1 \frac{\prod_{i=1}^{n+r} (z-z_i)}{\prod_{j=1}^{m+k} (z-p_j)}, \quad (9-4)$$

waarin z_i voor $i = 1, \dots, n$ de nulpunten van $H(z)$ zijn en z_i voor $i = n+1, \dots, n+r$ de nulpunten van $R(z)$ zijn, terwijl p_j voor $j = 1, \dots, m$ de polen van $H(z)$ zijn en p_j voor $j = m+1, \dots, m+k$ de polen van $R(z)$ zijn. In het geval $C(z) = RG_1(z)H_1(z)$ geldt hetzelfde indien voor $RG_1(z)$ en $H_1(z)$ resp. $R(z)$ en $H(z)$ wordt gekozen. Indien wordt aangenomen dat alle polen enkelvoudig zijn geldt:

$$C(z) = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \dots + \frac{A_s}{z-p_s} + \dots + \frac{A_{m+k}}{z-p_{m+k}} \quad (9-5)$$

De algemene gedaante van een term in het rechterlid is: $\frac{A_s}{z-p_s}$, waarvan de inverse z -transformatie luidt:

$$c(nT) = Z^{-1} \left\{ \frac{A_s}{z-p_s} \right\} = A_s e^{-a_s(n-1)T}$$

voor $n = 1, 2, \dots$, met $a_s = -\frac{1}{T} \ln p_s$ (9-6)

waarin $p = -a_s$ een pool in het p -vlak is.

Vervolgens dient A_s nog bepaald te worden. Vermenigvuldig het linker- en

het rechter gedeelte van (9-5) met $\prod_{j=1}^{m+k} (z-p_j)$ dan geldt:

$$K^1 \prod_{i=1}^{n+r} (z-z_i) = A_1 \sum_{j=2}^{m+k} (z-p_j) + A_2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{m+k} (z-p_j) + \dots + A_s \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m+k} (z-p_j) + \dots + A_{m+k} \prod_{j=1}^{m+k-1} (z-p_j)$$

Stel vervolgens $z = p_s$ dan is

$$K^1 \prod_{i=1}^{n+r} (p_s - z_i) = A_s \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m+k} (p_s - p_j)$$

of

$$A_s = K^1 \frac{\prod_{i=1}^{n+r} (p_s - z_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m+k} (p_s - p_j)}, \quad (9-7)$$

of in woorden:

$$A_s = K^1 \frac{\text{product van alle vektoren van alle nulpunten naar de pool } p_s}{\text{product van de vektoren van alle andere polen naar de pool } p_s}$$

Voorbeeld 9.3

Gegeven het volgende blokschema (fig. 9.7):

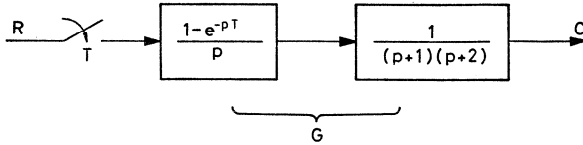


Fig. 9.7

Bepaal het uitgangssignaal op de bemonsteringstijdstippen, indien op de ingang van dit systeem een stap wordt gezet. Stel $T = \ln 2$

$$C(z) = R(z) \cdot G(z)$$

$$G(z) = \frac{\frac{1}{8}(z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} \quad \text{en} \quad R(z) = \frac{z}{z - 1}$$

$$C(z) = \frac{\frac{1}{8}z(z + \frac{1}{2})}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = \frac{A_1}{z - 1} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{2}} + \frac{A_3}{z - \frac{1}{4}}$$

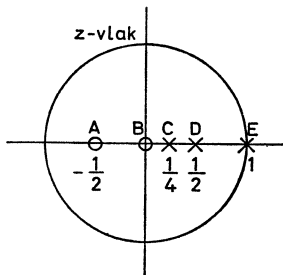


Fig. 9.8

$$c(nT) = A_1 e^{-a_1(n-1)T} + A_2 e^{-a_2(n-1)T} + A_3 e^{-a_3(n-1)T}$$

voor $n = 1, 2, 3, \dots$, met $A_1 = \frac{1}{8} \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BE}}{\overline{CE} \cdot \overline{DE}} = \frac{1}{2}$

$$A_2 = \frac{1}{8} \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}{\overline{CD} \cdot \overline{ED}} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = \frac{1}{8} \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{DC} \cdot \overline{EC}} = \frac{1}{8}$$

$$a_1 T = -\ln p_1 = -\ln 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_2 T = -\ln p_2 = -\ln \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$$

$$a_3 T = -\ln p_3 = -\ln \frac{1}{4} \Rightarrow a_3 = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$$

Het overgangsverschijnsel wordt dus beschreven door:

$$c(nT) = 0 \quad \text{voor } n = 0$$

$$c(nT) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-(n-1) \ln 2} + \frac{1}{8} e^{-2(n-1) \ln 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\text{voor } n = 1, 2, \dots$$

In fig. 9.9 is $c(nT)$ weergegeven.

Indien $C(z)$ een nulpunt in de oorsprong bevat: $z = 0$, kan men ook als volgt te werk gaan:

$$C(z) = K^1 z \frac{\prod_{i=1}^{n+r-1} (z - z_i)}{\prod_{j=1}^{m+k} (z - p_j)} \quad \text{of} \quad (9-8)$$

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{A_1^1}{z - p_1} + \frac{A_2^1}{z - p_2} + \dots + \frac{A_{m+k}^1}{z - p_{m+k}} \quad (9-9)$$

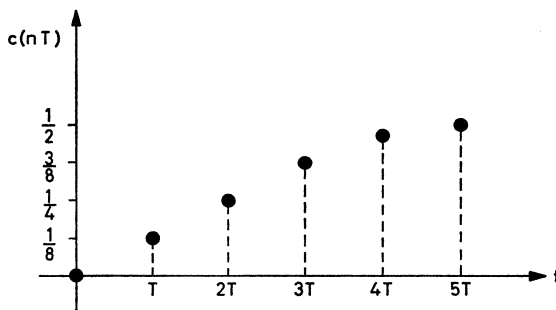


Fig. 9.9

Er geldt nu

$$C(z) = \frac{A_1^1 z}{z - p_1} + \frac{A_2^1 z}{z - p_2} + \dots + \frac{A_{m+k}^1 z}{z - p_{m+k}}$$

De algemene gedaante van een term in het rechterlid is $\frac{A_s^1 z}{z - p_s}$ waarvan de inverse z -transformatie luidt:

$$c(nT) = Z^{-1} \left\{ \frac{A_s^1 z}{z - p_s} \right\} = A_s^1 e^{-a_s nT} \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots \quad (9-10)$$

met

$$A_s^1 = K^1 \frac{\prod_{i=1}^{n+r-1} (p_s - z_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{m+k} (p_s - p_j)} \quad (9-11)$$

of in woorden:

$$A_s^1 = K^1 \frac{\text{produkt van alle vektoren van alle nulpunten, behalve één nulpunt in de oorsprong naar de pool } p_s}{\text{produkt van de vektoren van alle andere polen naar de pool } p_s}$$

A_s en A_s^1 zijn reële getallen indien a_s reëel is en complexe getallen als a_s complex is. In dat geval zal er nog een toegevoegd complexe term voorkomen A_s^* of A_s^{1*} met $\text{mod } A_s = \text{mod } A_s^*$ en $\text{arg } A_s = -\text{arg } A_s^*$ resp. $\text{mod } A_s^1 = \text{mod } A_s^{1*}$ en $\text{arg } A_s^1 = -\text{arg } A_s^{1*}$.

Voorbeeld 9.4

Dezelfde gegevens als in voorbeeld 9.3 met het volgende polen- en nulpuntenbeeld (fig. 9.10).

$$C(z) = \frac{A_1^1 z}{z-1} + \frac{A_2^1 z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{A_3^1 z}{z-\frac{1}{4}}$$

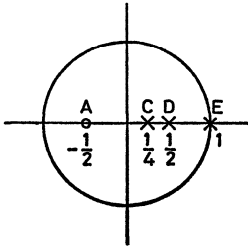


Fig. 9.10

$$A_1^1 = \frac{1}{8} \frac{\overline{AE}}{\overline{CE} \cdot \overline{DE}} = \frac{1}{2}, \quad A_2^1 = \frac{1}{8} \frac{\overline{AD}}{\overline{CD} \cdot \overline{ED}} = -1$$

en

$$A_3^1 = \frac{1}{8} \frac{\overline{AC}}{\overline{DC} \cdot \overline{EC}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{zodat } c(nT) &= \frac{1}{2} - (e^{-\ln 2})^n + \frac{1}{2}(e^{-\ln 2})^{2n} \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots \\ \text{zodat } c(0) &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0, \text{ enzovoort (zie fig. 9.9).} \end{aligned}$$

9.4 POOLBAANMETHODE

De poolbaanmethode is een grafische methode om uit de polen en de nulpunten van een open systeem de polen en nulpunten van het gesloten systeem te bepalen bij variatie van één van de parameters van het systeem (zie monografie III). Meestal wordt een variabele versterking genomen. Indien het polen- en nulpuntenbeeld van de overdrachtsfunctie $H^*(p)$ gegeven is in het p -vlak zal het vaak moeilijk zijn de poolbaan te konstrueren, uitgezonderd in enkele eenvoudige gevallen. De konstruktie van de poolbaan in het z -vlak is echter zeer eenvoudig en gaat op dezelfde wijze als voor continue systemen in het p -vlak. Voor de konstruktie van de poolbaan gelden een aantal regels. Deze regels zijn afgeleid voor continue systemen maar gelden ook voor het polen- en nulpuntenbeeld in het z -vlak. De belangrijkste regels zijn samengevat in tabel IX.1. De methode wordt geïllustreerd aan de hand van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 9.5

Gegeven het blokschema volgens fig. 9.11

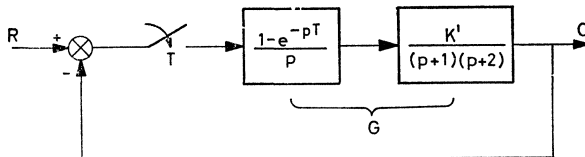


Fig. 9.11

Stel $T = \ln 2$. Bepaal de polen van het gesloten systeem bij variatie van de parameter K^1

$$G(z) = Z\left(\frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{K^1}{(p+1)(p+2)}\right) = \frac{\frac{K^1}{8}(z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

$$\left[K = \frac{K^1}{2} \text{ is de gelijkstroom- of systeemversterking} \right]$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

De poolbaanvergelijking luidt: $1 + G(z) = 0$ of $\frac{K^1}{8} \frac{(z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = -1$

Hieruit volgt:

$$\frac{(z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = -\frac{8}{K^1}$$

Voor variabele K^1 van 0 tot $+\infty$ begint de poolbaan in de polen $z = \frac{1}{2}$ en $z = \frac{1}{4}$ en eindigt voor $K^1 \rightarrow \infty$ in het nulpunt $z = -\frac{1}{2}$ en in het oneindige. De punten waar de poolbaan de reële as verlaat of op deze as terugkomt volgen uit $\frac{dK^1}{dz} = 0$

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}{(z + \frac{1}{2})} \right\} = \frac{(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})}{(z + \frac{1}{2})^2} = 0$$

dus

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De richting van de asymptoot is $\frac{-180 + n \cdot 360}{2 - 1} = -180^\circ$

De poolbaan beschrijft voor variabele K^1 een cirkel met straal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $z = -\frac{1}{2}$ als middelpunt (zie Fig. 9.12).

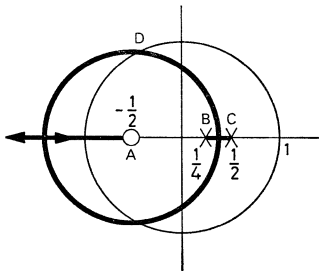


Fig. 9.12

De doorsnijding van de poolbaan met de eenheidscirkel bepaalt de waarde van K^1 (en hieruit K) waarvoor het systeem instabiel wordt. Grafisch is deze waarde eenvoudig te bepalen. Er geldt immers:

$$\frac{K^1}{8} \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD} \cdot \overline{CD}|} + 1 = 0 \text{ of } \frac{K^1}{8} = \frac{|\overline{BD}| |\overline{CD}|}{|\overline{AD}|}$$

Voorbeeld 9.6

Gegeven het blokschema volgens fig. 9.13.

Stel $T = 1$. Bepaal de poolbaan voor $0 \leq K^1 \leq \infty$

$$G(z) = Z\left(\frac{1-e^{-p}}{p} \cdot \frac{K^1 e^{-2p}}{p+1}\right) = \frac{(1-e^{-1})K^1}{z^2(z-e^{-1})} \quad \text{met } K = K^1$$

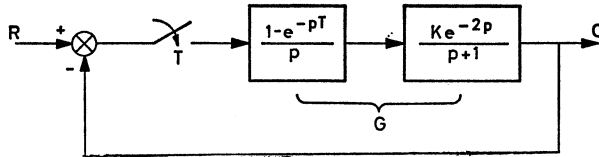


Fig. 9.13

De poolbaanvergelijking luidt:

$$\frac{(1-e^{-1})K^1}{z^2(z-e^{-1})} + 1 = 0 \quad \text{of} \quad \frac{1}{z^2(z-e^{-1})} = -\frac{1}{(1-e^{-1})K^1}$$

Startpunten: $z = 0$ (2x) en $z = e^{-1}$ (polen)

Eindpunten: $|z| = \infty$ (3x) (geen nulpunten)

Asymptootrichtingen: $\frac{-180 + n \cdot 360}{3 - 0} = -60 + n \cdot 120 = -60^\circ, +60^\circ, -180^\circ$

Zwaartepunt: $\frac{e^{-1}}{3} \approx 0,1$

Vertrekpunt: $\frac{dK^1}{dz} = \frac{d}{dz} \{z^2(z-e^{-1})\} = 3z^2 - 2ze^{-1} = 0,$
 $z_1 = 0$ en $z_2 = \frac{2}{3}e^{-1} \approx 0,2$

De poolbaan is geschetst in Fig. 9.14.

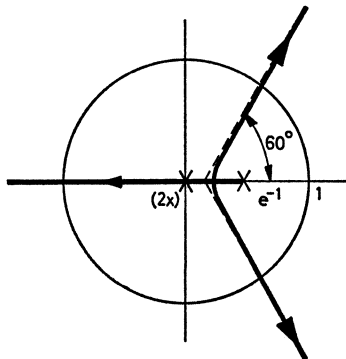


Fig. 9.14

Het is evenzo mogelijk de poolbaan te schetsen bij variatie van een der andere parameters in het systeem.

Dit wordt aan de hand van het volgende voorbeeld toegelicht.

Voorbeeld 9.7

Gegeven het blokschema volgens fig. 9.15.

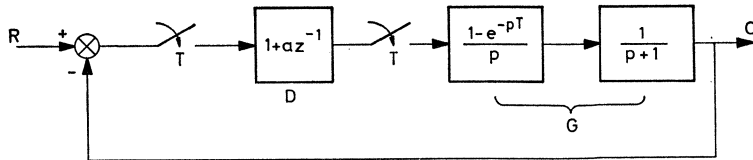


Fig. 9.15

Stel $T = \ln 2$. Bepaal de poolbaanvergelijking voor $0 \leq a < \infty$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

Poolbaanvergelijking: $1 + D(z)G(z) = 0$

$$D(z) = 1 + az^{-1} = \frac{z+a}{z}$$

$$G(z) = Z \left\{ \left(\frac{1-e^{-pT}}{p} \frac{1}{p+1} \right) \right\} = \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$$

De poolbaanvergelijking wordt dus:

$$\frac{z+a}{z} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} + 1 = 0$$

Deze vergelijking dient zodanig geschreven te worden dat het rechterlid slechts een functie van a is:

$$\frac{1}{2}(z+a) + z^2 - \frac{1}{2}z = 0 \quad \text{of} \quad \frac{1}{z^2} = -\frac{2}{a}$$

De poolbaan start voor $z = 0$. De asymptotrichtingen zijn $\frac{-180 + n360}{2} = -90^\circ$ en $+90^\circ$. De poolbaan is weergegeven in fig. 9.16a.

Voor $z = \pm j$ wordt het systeem instabiel d.w.z. voor $a = 2$.

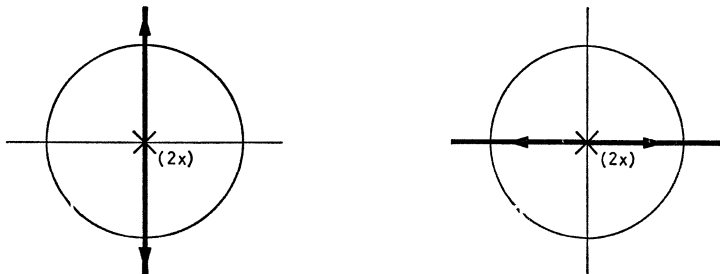


Fig. 9.16

Indien a varieert van 0 naar $-\infty$ ontstaat de poolbaan uit

$$\frac{1}{z^2} = \frac{-2}{a} \text{ met } a < 0 \text{ (zie fig. 9.16 b).}$$

Voor $z = \pm 1$ wordt het systeem instabiel, d.w.z. voor $a = -2$.

9.5 EFJEKT VAN DE POLENKONFIGURATIE IN HET z -VLAK OP HET OVERGANGSVERSCHIJNSEL

Voor een aantal situaties wordt nagegaan welke invloed de polen in een bepaald gebied van het z -vlak hebben op het overgangsverschijsnel.

In de termen $A_s e^{-a_s(n-1)T}$ resp. $A_s^1 e^{-a_s n T}$ zijn de polen verantwoordelijk voor dat deel van het overgangsverschijsnel, bepaald door $a_s = -\frac{1}{T} \ln p_s$.

De invloed van een pool p_s in het totale overgangsverschijsnel wordt bepaald door de coëfficiënt A_s resp. A_s^1 , waarvan de waarde volgt uit de ligging van de polen en nulpunten.

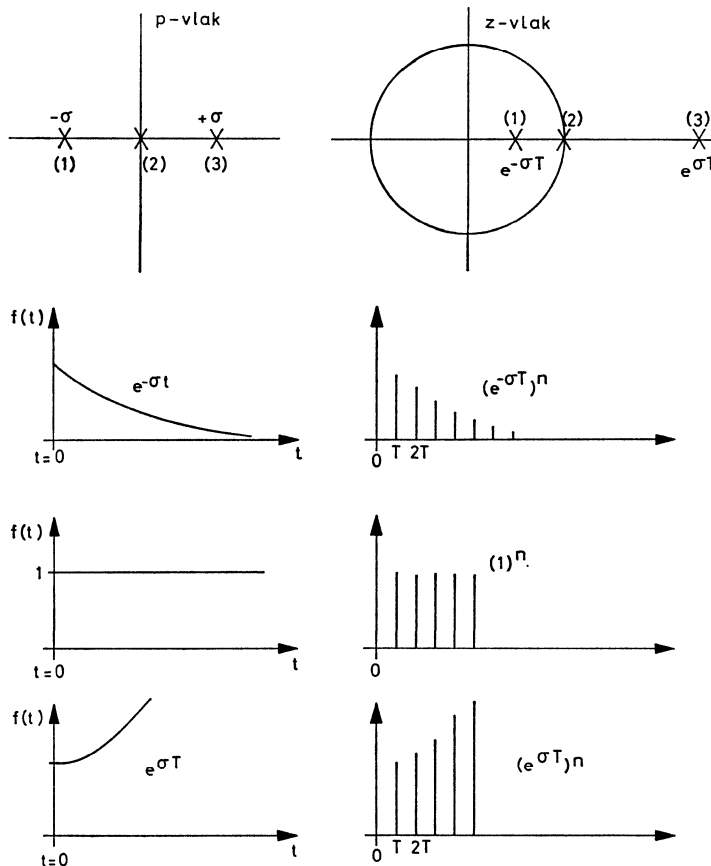


Fig. 9.17

De volgende gevallen worden onderscheiden:

1. enkelvoudige reële polen: $p_i = -\sigma_i$
2. toegevoegd complexe polen: $p_{1,2} = -\sigma_i \pm j\omega_i$
3. toegevoegd complexe polen op de grens van de primaire strook:

$$p_{1,2} = -\sigma_i \pm j \frac{\omega_s}{2}$$

1. *Enkelvoudige reële polen* in het p -vlak dus $p_i = -\sigma_i$. Het beeldpunt in het z -vlak is: $z_i = e^{-\sigma_i T}$.

In fig. 9.17 is voor 3 verschillende poollocaties in het p -vlak de getransformeerde poollocatie in het z -vlak aangegeven.

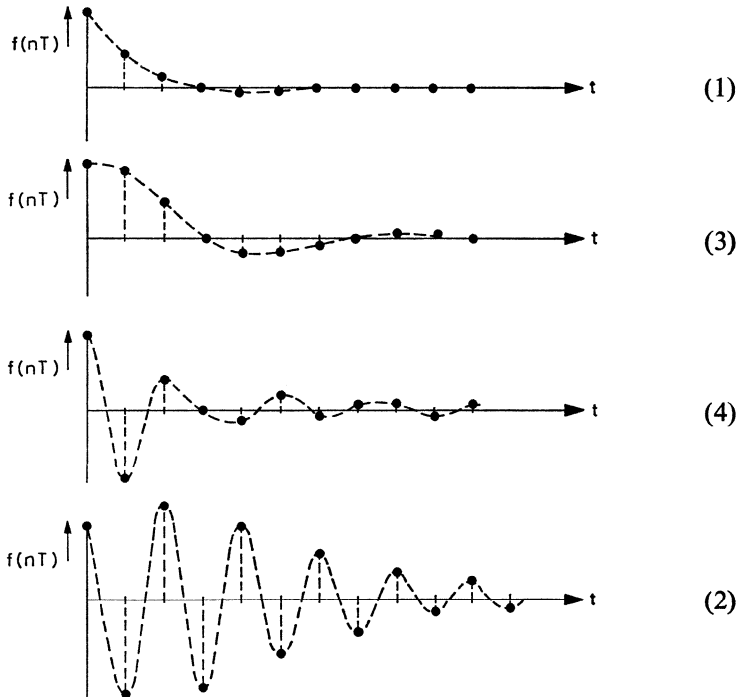
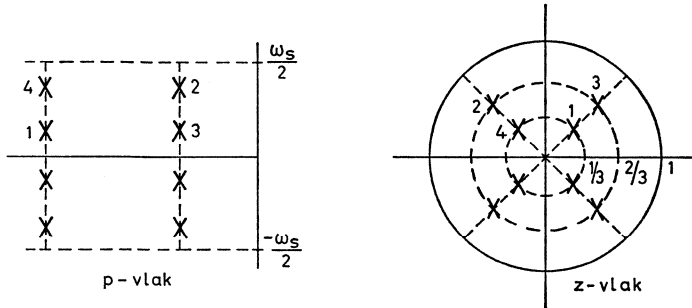


Fig. 9.18

Tevens zijn de impulsresponsies voor deze gevallen getekend.

Hoe dichter de pool in het p -vlak bij de oorsprong komt, hoe meer de pool in het z -vlak het punt $+1$ nadert. Een ver afgelegen pool in het linkerhalfvlak van het p -vlak resulteert in een dicht bij de oorsprong gelegen pool in het z -vlak en betekent een snel overgangsverschijnsel.

De negatief reële as in het p -vlak wordt afgebeeld als de positief reële as binnen de eenheidscirkel in het z -vlak; de positief reële as in het p -vlak wordt afgebeeld als de positief reële as buiten de eenheidscirkel in het z -vlak. De lineaire schaal in het p -vlak gaat over in een logaritmische schaal in het z -vlak.

2. *Toegevoegd complexe polen* in het p -vlak, dus $p_{1,2} = -\sigma_i \pm j\omega_i$ (zie fig. 9.18). De beeldpunten in het z -vlak zijn

$$z_1 = e^{-\sigma_i T} e^{+j\omega_i T} \quad \text{en} \quad z_2 = e^{-\sigma_i T} e^{-j\omega_i T}$$

Aangenomen wordt dat de bemonsteringsfrequentie ω_s groter is dan tweemaal de frequentie ω_i , dus $\omega_s > 2\omega_i$.

Voor konstante σ_i en variabele ω_i geldt: $\text{mod } z = e^{-\sigma_i T} = \text{konstant}$ en $\text{arg } z = \pm \omega_i T$, d.w.z. de polen bewegen zich over een cirkel met straal $e^{-\sigma_i T}$. Voor konstante ω_i en σ_i variabel geldt: $\text{arg } z = \pm \omega_i T = \text{konstant}$ en $\text{mod } z = e^{-\sigma_i T}$, d.w.z. de polen bewegen zich over 2 halfrechten vanuit de oorsprong.

In fig. 9.18 is voor twee verschillende poollocaties de getransformeerde poollocatie in het z -vlak getekend. Tevens zijn de impulsresponsies voor deze gevallen weergegeven.

3. *Toegevoegd complexe polen op de primaire strook* in het p -vlak (zie fig. 9.19).

Indien $p_{1,2} = -\sigma_i \pm \frac{j\omega_s}{2}$ geldt

$$z_{1,2} = e^{-\sigma_i T} e^{\pm j\omega_s T/2} = -e^{-\sigma_i T} \quad (2 \times)$$

Dit is een dubbelpool op de negatieve reële as in het z -vlak binnen de eenheidscirkel als $\sigma > 0$ en buiten de eenheidscirkel als $\sigma < 0$.

Afhankelijk van de ligging van de overige polen en nulpunten wordt de versterkingsfaktor en de faseverschuiving van de uitgangsgreks in de hiervoor beschreven gevallen beïnvloed.

Dit effect is in de voorgaande figuren buiten beschouwing gelaten. Ook de aanwezigheid van een nulde orde houdschakeling zal bijdragen tot een andere nulpuntenconfiguratie.

9.6 ENIGE ALGEMENE OPMERKINGEN OVER POLEN- EN NULPUNTEN-KONFIGURATIES IN HET z-VLAK

Worden de z-transformaties van een systeem zonder houdschakeling, $G(z)$ en een systeem met nulde orde houdschakeling $G_{ho}G(z)$, met elkaar vergeleken dan kan het volgende worden opgemerkt:

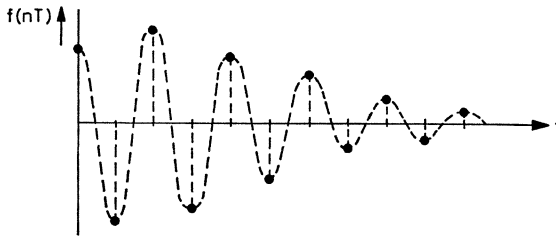
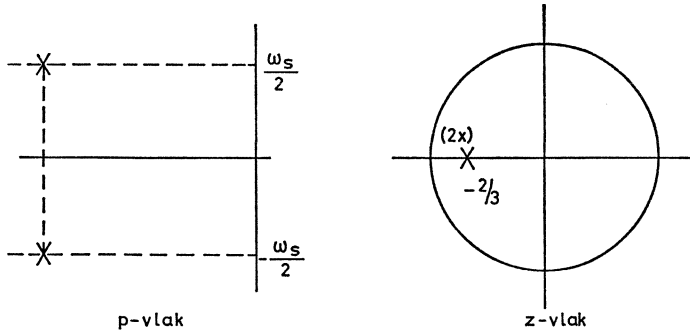


Fig. 9.19

1. De polen van $G(z)$ en van $G_{ho}G(z)$ zijn dezelfde.
2. De nulpunten van $G(z)$ en $G_{ho}G(z)$ verschillen.

In een eerste orde systeem wordt het nulpunt van $G(z)$ in de oorsprong bij de overdracht $G_{ho}G(z)$ vervangen door een versterkingsfactor (zie voorbeeld 9.8 a). In een hoger orde systeem hebben $G(z)$ en $G_{ho}G(z)$ evenveel nulpunten. De nulpunten van $G_{ho}G(z)$ zijn i.h.a. naar links verschoven t.o.v. de nulpunten van $G(z)$ (zie voorbeeld 9.8 b). Eenzelfde verschijnsel doet zich ook voor bij een vergelijking van $G(z)$ en $G(z, m)$ en $G_{ho}G(z)$ en $G_{ho}G(z, m)$, (zie voorbeeld 9.8 c).

Voorbeeld 9.8 a

Stel $G(p) = \frac{1}{p+a}$ dan geldt: $G(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}}$ en $G_{ho}G(z) = \frac{1}{a} \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$

Voorbeeld 9.8b

Stel $G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$ en $T = \ln 2$,

dan geldt: $G(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$ en $G_{ho} G(z) = \frac{\frac{1}{8}(z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$

Voorbeeld 9.8c

Stel $G(p) = \frac{1}{p+a}$ dan geldt:

$G(z, m) = \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$ en $G_{ho} G(z, m) = \frac{1}{a} \frac{z(1 - e^{-amT}) + e^{-amT} - e^{-aT}}{z(z - e^{-aT})}$

In dit laatste voorbeeld is de invloed van de fiktieve tijdvertraging merkbaar in de extra pool $z = 0$ in de oorsprong. De werking hiervan wordt door het nulpunt enigszins getemperd.

Bij de terugtransformatie van een polen- en nulpuntenbeeld in het z -vlak naar het p -vlak ontstaat enige onzekerheid omdat deze transformatie niet eenduidig is. Nulpunten hebben een sterke invloed, hetgeen o.a. blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 9.9

Gegeven de polen- en nulpuntenbeelden volgens fig. 9.20a en fig. 9.20b met $T = 1$.

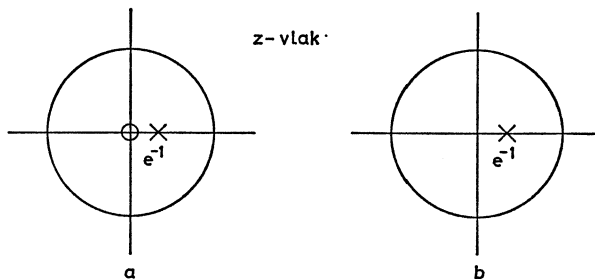


Fig. 9.20

Terugtransformatie voor de configuratie van fig. 9.20a levert

$c(nT) = K e^{-nT}$ want $Z^{-1} \left(\frac{Kz}{z - e^{-1}} \right) = K e^{-nT}$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$

Dit is de impulsresponsie van een eerste orde systeem (fig. 9.21 a).

De configuratie volgens fig. 9.20b geeft $c(nT) = Ke^{-(n-1)T}$ voor $n=1,2,3, \dots$. Deze responsie kan afkomstig zijn van:

a. De impulsresponsie van een eerste orde systeem met dode tijd $T_D = T$ (fig. 9.21 b), want:

$$Z\left(\frac{Ke^{-pT}}{p+1}\right) = \frac{K}{z} \cdot \frac{z}{z-e^{-1}}$$

b. De impulsresponsie van een eerste orde systeem met een dode tijd $T_D < T$ (fig. 9.21 c), want:

$$Z_m\left(\frac{K_1}{p+1}\right) = \frac{K_1 e^{-mT}}{z-e^{-1}} = \frac{K}{z-e^{-1}}$$

c. De impulsresponsie van een eerste orde systeem voorafgegaan door een nulde orde houdschakeling (fig. 9.21 d), want:

$$Z\left(\frac{1-e^{-pT}}{p} \cdot \frac{K_2}{p+1}\right) = \frac{K_2(1-e^{-1})}{z-e^{-1}} = \frac{K}{z-e^{-1}}$$

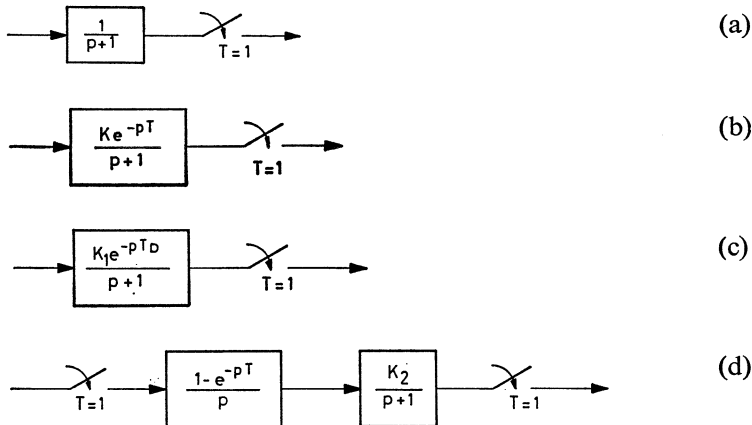


Fig. 9.21

Een ander effect dat optreedt bij terugtransformatie van een polen- en nulpuntenbeeld in het z -vlak naar het p -vlak is het volgende:

Een diskreet element kan een pool op de negatief reële as van het z -vlak bevatten. Deze pool geeft een oscillerende uitgangsrj die al dan niet gedempt is. Het is echter onmogelijk deze pool terug te transformeren naar het p -vlak. Hiervoor zijn minstens twee polen nodig die dan twee toegevoegd complexe polen in het p -vlak geven. De oplossing van dit probleem wordt gegeven in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 9.10

Gegeven een diskreet element met een polen- en nulpuntenbeeld weergegeven in fig. 9.22a.

De impulsresponsie wordt gevonden uit de machtreeksontwikkeling van

$$C(z) = \frac{z}{z+e^{-1}} = 1 - e^{-1}z^{-1} + e^{-2}z^{-2} - e^{-3}z^{-3} + \dots$$

zodat,

$$c(nT) = \{1, -e^{-1}, +e^{-2}, -e^{-3}, \dots\} \quad (\text{zie fig. 9.22 b})$$

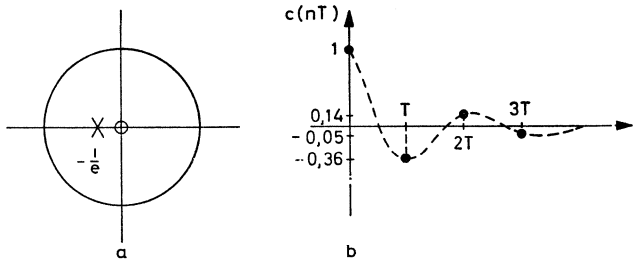


Fig. 9.22

Het is niet mogelijk dit polen- en nulpuntenbeeld terug te transformeren naar het p -domein. Een oscillatorisch verschijnsel in het p -domein dient afkomstig te zijn van een stel toegevoegd complexe polen. Dit stel wordt verkregen door een extra pool en een extra nulpunt in $z = -e^{-1}$ toe te voegen aan het polen- en nulpuntenbeeld van fig. 9.22 b.

Er ontstaat dan:

$$C(z) = \frac{z(z+e^{-1})}{(z+e^{-1})^2} = \frac{z(z+e^{-1})}{z^2+2ze^{-1}+e^{-2}}$$

Men kan dit als volgt aantonen.

De z -transformatie van $\frac{p+1}{(p+1)^2+\omega_0^2}$ luidt voor $T=1$:

$$\frac{z^2 - ze^{-1} \cos \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-1} \cos \omega_0 T + e^{-2}} = \frac{z(z - e^{-1} \cos \omega_0 T)}{\{z - e^{-1} \cos \omega_0 T + je^{-1} \sqrt{1 - \cos^2 \omega_0 T}\} \{z - e^{-1} \cos \omega_0 T - je^{-1} \sqrt{1 - \cos^2 \omega_0 T}\}}$$

Indien $\omega_0 \rightarrow \frac{\omega_s}{2}$ geldt $\cos \omega_0 T \approx -1 + \delta$, zodat

$$\begin{aligned}
& Z\left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + \omega_0^2}\right) \\
& \approx \frac{z(z + e^{-1} - \delta e^{-1})}{(z + e^{-1} - \delta e^{-1} + j\sqrt{2\delta}e^{-1})(z + e^{-1} - \delta e^{-1} - j\sqrt{2\delta}e^{-1})} = \\
& = \frac{z(z + z_1)}{(z + p_1)(z + p_2)}
\end{aligned}$$

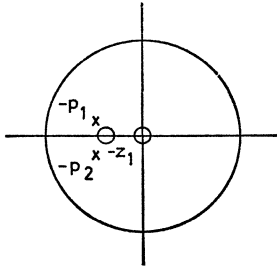


Fig. 9.23

In het limiet geval wordt $\delta = 0$ en geldt:

$$Z\left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + \omega_0^2}\right) = \frac{z(z + e^{-1})}{(z + e^{-1})^2} = \frac{z}{z + e^{-1}}$$

Uit het bovenstaande voorbeeld blijkt dat op een eenvoudige wijze met behulp van digitale filters van de eerste orde een oscillerend verschijnsel kan worden verkregen.

Tabel IX.1

Indien a de variabele parameter is luidt de poolbaan vergelijking :

$$H(z) = \frac{T(z)}{N(z)} = -\frac{1}{a}. \text{ Stel dat er } n \text{ nulpunten zijn en } m \text{ polen}$$

Stel $a \geq 0$ en a loopt van 0 tot ∞

1. Beginpunten	polen van $H(z)$ en $n - m$ polen in het oneindige als $n > m$
2. Eindpunten	nulpunten van $H(z)$ en $m - n$ nulpunten in het oneindige als $m > n$.
3. Takken op de reële as	een punt op de reële as behoort tot de poolbaan, indien het aantal polen minus het aantal nulpunten rechts van het beschouwde punt oneven is.
4. Aankomst- en vertrekpunten	Voor een aankomst- of vertrekpunt (meervoudig punt) geldt: $\frac{da}{dz} = 0 \text{ met } a = -\frac{N(z)}{T(z)}$
5. Asymptoten	
a. richting	de richting φ_{as} van de asymptoten wordt gevonden uit $\varphi_{as} = \frac{-180^\circ + k 360^\circ}{m - n} \text{ voor } k = 0, 1, 2, \dots, m - n - 1 $
b. aantal	$ m - n $
c. snijpunt	het snijpunt z_{as} van de asymptoten wordt gevonden $\text{uit } z_{as} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{m - n} \text{ Dit snijpunt ligt op de reële as.}$

Indien $a \leq 0$ en a loopt van $-\infty$ tot 0 blijven de regels 4 en 5 ongewijzigd maar worden de regels 1 t/m 3.

1. Beginpunten	nulpunten van $H(z)$ en $n - m$ nulpunten in het oneindige als $n > m$
2. Eindpunten	polen van $H(z)$ en $m - n$ polen in het oneindige als $m > n$.
3. Takken op de reële as	een punt op de reële as behoort tot de poolbaan indien het aantal polen minus het aantal nulpunten rechts van het beschouwde punt even is.

X. Ontwerpen van regelsystemen met signaalbemonstering en digitale regelsystemen

10.1 INLEIDING

Voor het ontwerpen van een regelkring en de daarin voorkomende regelaars en compensatienetwerken is enige kennis over de dynamische en statische eigenschappen van het te regelen systeem noodzakelijk.

Voor de in dit hoofdstuk te behandelen ontwerpmethoden is het voldoende de structuur van het systeem te kennen, o.a. de orde van het systeem, en de parameters van het systeem te kennen, zoals de polen en nulpunten, tijdkonstanten of coëfficiënten van de overdrachtsfunctie.

Deze kennis dient men eerst te vergaren m.b.v. berekeningen en metingen aan het systeem.

Indien men het (te regelen) systeem voldoende nauwkeurig fysisch kan beschrijven is het mogelijk met behulp van onder andere de wetten van behoud van massa, energie en impuls, vergelijkingen te noteren die het systeem kwalitatief beschrijven. Voor een nadere detaillering van de coëfficiënten in deze vergelijkingen is men meestal aangewezen op het doen van metingen, aangezien vele verschijnselen slechts kwalitatief beschreven zijn.

Men kan ook zonder voorafgaande theoretische analyse testsignalen aan het systeem toevoeren teneinde tot een handelbaar model ervan te geraken.

De gehele verzameling van technieken die gebruikt worden om voldoende gegevens over een systeem te verkrijgen worden identifikatiemethoden en parameterschattingsmethoden genoemd.

In deze monografie zal hieraan geen aandacht worden besteed en zal er vanuit worden gegaan dat het model van het systeem bekend is ofwel in de vorm van een differentiaal-, differentievergelijking of overdrachtsfunctie, dan wel in de vorm van een frekwentiekarakteristiek, of responsie op een ander testsignaal. Bij de frekwentieresponsiemethode kan men bij continue systemen rechtstreeks uitgaan van de frekwentiekarakteristiek en is het niet noodzakelijk bij het ontwerpen de overdrachtsfunctie van het systeem expliciet te bepalen.

Bij de polen en nulpuntenmethode is het noodzakelijk de overdrachtsfunctie van een systeem te bepalen.

Bij systemen met signaalbemonstering kan men de opgenomen frekwentiekarakteristieken niet rechtstreeks gebruiken maar moet men b.v. via de

w -transformatie komen tot aangepaste karakteristieken. In dat geval moet men dus toch eerst de overdrachtsfunctie van het systeem bepalen.

De bepaling van het mathematisch model uit de frekwentieresponsie wordt behandeld in monografie II, terwijl de bepaling van het mathematisch model uit de responsie van het systeem op een testsignaal behandeld wordt in monografie III.

De in deze monografie behandelde systemen kunnen bestaan uit continue en diskrete elementen.

De modelvorming van de continue elementen in systemen met signaalbemonstering zal op dezelfde wijze kunnen plaatsvinden als voor volledig continue systemen.

De modelvorming van de diskrete elementen is van geen belang omdat dit juist de elementen zijn die door de ontwerper zelf worden ontworpen (digitale filters, digitale regelalgorithmen).

De volgende methoden kunnen worden toegepast bij het ontwerpen van systemen met signaalbemonstering en digitale systemen:

1. frekwentieresponsiemethode
2. polen en nulpuntenmethode
3. het gebruik van vuistregels
4. methoden die gebruik maken van de toestandsbeschrijving van een systeem.

De vierde methode zal behandeld worden in de hoofdstukken XII en XIII. Bij al deze ontwerpmethoden zal zowel het statische als dynamische karakter van de regelkring beschouwd moeten worden, zodat zowel ontwerpcriteria met betrekking tot het dynamische gedrag als ontwerpcriteria met betrekking tot het statische gedrag gebruikt worden.

Bovendien zal men een keuze moeten maken tussen diverse regelstructuren zoals deze o.a. beschreven zijn in monografie I, hoofdstuk VIII (terugkoppeling, voorwaartsregeling, kaskaderegeling, stoorkorrekteregeling, enz.)

Bij systemen met signaalbemonstering zijn wel een aantal extra ontwerp-mogelijkheden aanwezig, t.o.v. continue systemen.

1. De keuze tussen digitale en continue compensatienetwerken. Speciale aandacht zal worden besteed aan digitale compensatienetwerken, meestal verwezenlijkt als een rekenalgorithme in de digitale rekenmachine.
2. De keuze van de bemonsteringsfrekwentie. Deze bepaalt in sterke mate het dynamische karakter van de regelkring en is binnen bepaalde grenzen nog te kiezen afhankelijk van de tijdconstanten van het systeem en de complexiteit en hoeveelheid berekeningen die op de rekenmachine in een d.d.c. geregeld proces dienen te worden uitgevoerd.
3. De plaats en het aantal schakelaars in de regelkring.

De keuze van synchrone of asynchrone schakelaars.

De mogelijkheid van verschillende bemonsteringsfrequenties van de schakelaars.

Een speciale klasse van systemen vormen de tijdoptimale digitale regelsystemen. Het bijzondere ten opzichte van de tijdoptimale continue regelsystemen is het feit dat slechts op de bemonsteringstijdstippen de signalen die aan het proces worden toegevoerd van grootte kunnen veranderen. Hiermee kan bereikt worden dat een bepaalde klasse van signalen in een minimum aantal bemonsteringstijdstippen op de bemonsteringstijdstippen exakt gevolgd wordt (minimum settling time) en ook na dit minimum aantal bemonsteringstijdstippen tussen de bemonsteringstijdstippen het signaal exakt gevolgd wordt (ripple free response).

Op de punten 1 en 2 zal in dit hoofdstuk nader worden ingegaan. Enige aandacht zal tevens besteed worden aan punt 3.

Het ontwerp van tijdoptimale regelaars zal behandeld worden in hoofdstuk XIII.

10.2 STATISCHE FOUTCOËFFICIËNTEN

Ontwerpkriteria die het statische gedrag beschrijven zijn de zogenaamde statische foutcoëfficiënten (zie ook monografie II voor de definitie van foutcoëfficiënten voor continue systemen).

Voor een volledig teruggekoppeld systeem (fig. 10.1) geldt voor de fout op de bemonsteringstijdstippen $E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)}$.

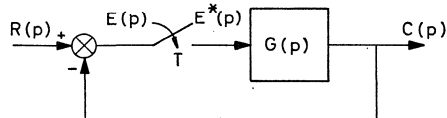


Fig. 10.1

Volgens het eindwaarde theorema is

$$e_{ss}^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{R(z)}{1+G(z)} \quad (10-1)$$

De fout in blijvende toestand hangt dus af van het ingangssignaal $R(z)$ en de overdrachtsfunctie $G(z)$. Met name de termen $\frac{1}{z-1}$ die hierin eventueel voorkomen zijn van groot belang. De fout zal worden nagegaan voor diverse ingangssignalen en diverse configuraties van $G(z)$.

Stapvormig ingangssignaal. Positiefoutcoëfficiënt K_p

$$R(z) = R \frac{z}{z-1}$$

waarin R een konstante is die de grootte van de stap aangeeft.

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{Rz}{z-1} \frac{1}{1+G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R}{1+G(z)}$$

Stel de overdracht $G(z)$:

$$G(z) = K^1 \frac{\prod_{i=1}^m (z-z_i)}{(z-1)^k \prod_{j=1}^n (z-p_j)} \quad \text{met } p_j \neq 1$$

waarin k het aantal integraties aangeeft van $G(p)$.

Indien $G(p)$ geen integraties heeft geldt $G(z) = K^1 \frac{\prod_{i=1}^m (z-z_i)}{\prod_{j=1}^n (z-p_j)}$

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R}{1+G(z)} = \frac{R}{1+K_p}$$

waarin $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$ de positiefoutcoëfficiënt wordt genoemd. Deze is gelijk aan de gelijkspanningsversterking K_L van de lus.

Voor $k = 1$ d.w.z. één zuivere integratie in $G(p)$ geldt:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R}{K^1 \frac{\prod_{i=1}^m (z-z_i)}{1 + \frac{n-1}{\prod_{j=1}^n (z-p_j)(z-1)}}} = 0$$

Aangezien: $\lim_{z \rightarrow 1} G(z) \rightarrow \infty$ geldt dat de positiefoutcoëfficiënt oneindig is, m.a.w. de fout in stationaire toestand op een stapverstoring is nul.

Algemeen geldt dat voor $k \geq 1$ de fout in stationaire toestand nul wordt indien een stap op de ingang wordt gezet. Het systeem moet dus minstens één integratie in de voorwaartse weg hebben, wil de fout in stationaire toestand nul worden op een stapvormig ingangssignaal.

Rampfunctie als ingangsgrootheid. Snelheidsfoutcoëfficiënt K_v .

$$R(z) = \frac{RTz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{RTz}{(z-1)^2} \frac{1}{1+G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{RT}{(z-1)} \frac{1}{1+G(z)} \quad (10-2)$$

Indien $G(p)$ geen integratie heeft, geldt:

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{RT}{(z-1)} \frac{1}{1+G(z)} \rightarrow \infty$$

Indien $G(p)$ één integratie heeft geldt:

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{RT}{z-1} \frac{1}{1+G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{RT}{z-1} \frac{1}{1 + K^1 \frac{\prod_{i=1}^m (z-z_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (z-p_j)(z-1)}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{RT \prod (z-p_j)}{K^1 \prod (z-z_i)} = \frac{R}{K_v} \end{aligned}$$

waarin $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1) G(z)$ de snelheidsfoutcoëfficiënt wordt genoemd.

Er geldt tevens

$$K_v = \frac{R}{e_{ss}^*} = \frac{\text{grootte van de snelheid}}{\text{stationnaire afwijking}}$$

Indien $G(p)$ geen integratie heeft geldt: $K_v = 0$,

indien $G(p)$ één integratie heeft geldt: $K_v = K_L$ en

indien $G(p)$ twee of meer integraties heeft, geldt: $K_v \rightarrow \infty$

Bovendien geldt dan: $e_{ss}^* = 0$ m.a.w. de snelheidsfout gaat naar nul indien geldt dat $G(p)$ twee of meer integraties heeft ($k \geq 2$).

Ook voor andere ingangssignalen kan de fout in stationnaire toestand op deze wijze worden bepaald.

Overzicht foutcoëfficiënten en fouten in blijvende toestand

Evenals bij de continue systemen (zie monografie I, hoofdstuk V) kan een tabel worden gemaakt waarin de foutcoëfficiënten en fouten in blijvende toestand worden aangegeven voor diverse typen systemen (het typenummer wijst op het aantal integraties van $G(p)$, en diverse ingangssignalen).

Om de stationnaire fout onder alle omstandigheden zo klein mogelijk te houden zou het aanbeveling verdienen het aantal integraties zo groot mogelijk te maken. Er treden dan echter moeilijkheden op met de stabiliteit van het systeem, door de extra fasedraaiing die wordt ingevoerd.

Tabel X.1

ingangs- signaal / typenummer	$r(t) = RU(t)$ $R(z) = \frac{Rz}{z-1}$	$r(t) = RtU(t)$ $R(z) = \frac{RTz}{(z-1)^2}$	$r(t) = \frac{Rt^2}{2} U(t)$ $R(z) = \frac{RT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
0	$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$ $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$	$e_{ss} \rightarrow \infty$ $K_v = 0$	$e_{ss} \rightarrow \infty$ $K_a = 0$
1	$e_{ss} = 0$ $K_p = \infty$	$e_{ss} = \frac{R}{K_v}$ $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1) G(z)$	$e_{ss} \rightarrow \infty$ $K_a = 0$
2	$e_{ss} = 0$ $K_p = \infty$	$e_{ss} = 0$ $K_v = \infty$	$e_{ss} = \frac{R}{K_a}$ $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T^2} (z-1)^2 G(z)$

10.3 ONTWERPKRITERIA VOOR HET DYNAMISCHE GEDRAG VAN EEN SYSTEEM

Er zijn vele criteria die betrekking hebben op het dynamische gedrag van een systeem. Deze criteria hebben alle betrekking op de dynamica van het gesloten systeem maar sommige worden toegepast op de karakteristieken van het open systeem (b.v. fase- en versterkingsmarge), waarna konklusies worden getrokken over het gedrag van het gesloten systeem.

Afhankelijk van de toe te passen analyse- en ontwerpmethodede kan men onderscheiden:

1. Ontwerpkriteria bij toepassing van de frekwentieresponsiemethode.

T.o.v. de criteria zoals in monografie I vermeld voor continue systemen

dienen deze criteria voor systemen met signaalbemonstering betrokken te worden op de frekwentiekarakteristieken $H^*(j\omega)$ waarbij het handig is over te gaan op $H(j\omega_w)$.

2. Ontwerpkriteria bij toepassing van de polen- en nulpuntenmethode. Bij systemen met signaalbemonstering dienen deze criteria betrekking te hebben op de polen- en nulpuntenconfiguratie in het z -vlak.
3. Ontwerpkriteria die betrekking hebben op bepaalde kenmerken van de tijdresponsie van een systeem (met name de stapresponsie), zie monografie III. Er bestaat voor tweede orde systemen een duidelijk verband tussen de onder 2 en 3 genoemde criteria. Dit verband zal voor systemen met signaalbemonstering gevonden worden in de polen- en nulpuntenconfiguratie in het z -vlak.
4. Ontwerpkriteria die betrekking hebben op de totale tijdresponsie van het systeem zoals integraalkriteria.

Deze criteria kunnen enerzijds leiden tot het opstellen van vuistregels door deze criteria te minimalizeren bij een gegeven configuratie (b.v. de instelregel van Ziegler-Nichols); anderzijds kunnen deze criteria leiden tot optimale regelaars waarvan de configuratie niet, zoals in het geval van de instelling van een P.I.D. regelaar, bij voorbaat vastligt.

Bij deze laatste toepassing zal de beschrijving van het systeem in toestandsvergelijking, zie hoofdstuk XII, een rol spelen.

10.3.1. *Ontwerpkriteria in het frekwentiedomein*

In monografie II zijn een aantal ontwerpkriteria gegeven voor continue systemen waarvan de frekwentiekarakteristiek van het open systeem gegeven is, zoals de fase- en versterkingsmarge.

Bovendien worden criteria gegeven voor de frekwentiekarakteristiek van het gesloten systeem. (M - en N -lijnen, afwijkingsverhouding, bandbreedte). Deze criteria zijn ook geschikt voor systemen met signaalbemonstering indien wordt uitgegaan van

$$H^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(j\omega + jn\omega_s) \quad \text{of van} \quad H(j\omega_w), \quad \text{of} \quad H(j\omega_r).$$

De criteria hebben dan dezelfde betekenis, zie voorbeeld 10.2.

10.3.2. *Ontwerpkriteria in het z -domein*

Gebruikelijke criteria zijn: maximale absolute demping, maximale relatieve demping, maximaal optredende frekwentie van het overgangverschijnsel. Een lijn van absolute demping $\sigma = -a$ in het p -vlak is een lijn evenwijdig met de imaginaire as in het p -vlak. Deze wordt afgebeeld als een cirkel met straal

$e^{-\sigma T}$ in het z -vlak (zie fig. 10.2a). De eis dat de polen van het gesloten systeem binnen deze cirkel in het z -vlak liggen betekent dat het overgangsverschijnsel t.g.v. de ligging van de polen sneller uitdempt dan $\{e^{-\sigma nT}\}$.

Voor een lijn van relatieve demping in het p -vlak geldt:

$$p = -\sigma + j\omega, \text{ waarbij } \frac{\sigma}{\omega} = \text{tg } \theta = \text{constant ofwel } p = -\omega \text{tg } \theta + j\omega.$$

Deze lijn wordt in het z -vlak afgebeeld als $z = e^{-\omega T \text{tg } \theta} e^{j\omega T}$.

Dit is een logarithmische spiraal; indien gesteld wordt:

$$p = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{met } \zeta = \text{relative demping} = \text{konstant}$$

geldt

$$z = e^{-\zeta\omega_n T} e^{\pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{zie fig. 10.2b})$$

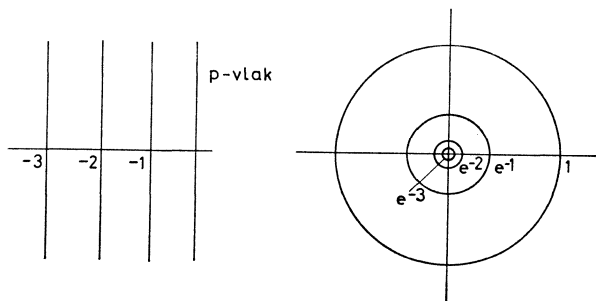


Fig. 10.2a

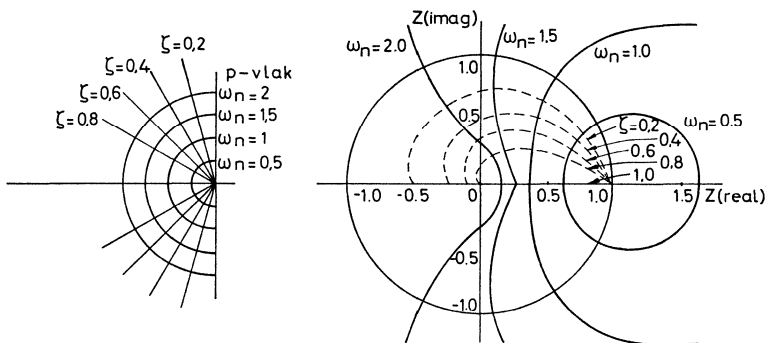


Fig. 10.2b

De afbeelding van de lijn van constante relatieve demping in de sekundaire stroken van het gesterde p -vlak valt echter niet samen met de relatieve dempingslijn in de primaire strook. De beschouwing van het systeem beperkt zich meestal tot de primaire strook vandaar dat in fig. 10.2 de logarithmische spiraal slechts tot $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ is getekend.

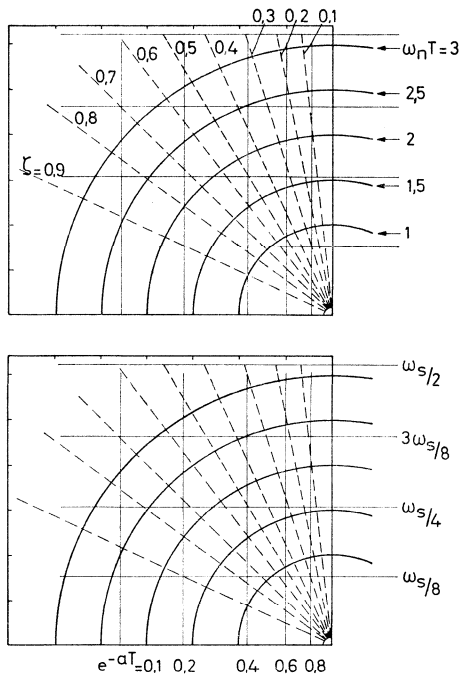


Fig. 10.3

De lijnen $\omega_n = \text{konstant}$ in het p -vlak gaan in het z -vlak over in krommen die loodrecht op de logarithmische spiralen staan (zie fig. 10.2b).

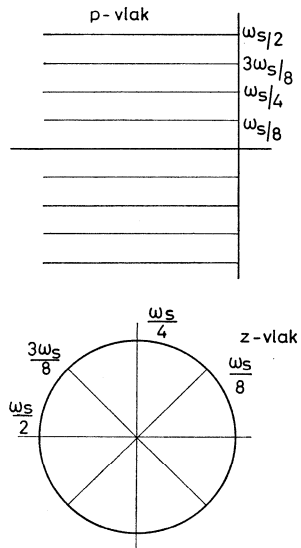


Fig. 10.4

Dit stelsel krommen ($\zeta = \text{konstant}$ en $\omega_n = \text{konstant}$) is aanzienlijk eenvoudiger van vorm in het zogenaamde $\ln z$ -vlak (zie fig. 10.3). Het nadeel is echter dat b.v. het tekenen van een poolbaan in dit vlak niet eenvoudig is (zie monografie III).

Een lijn van max. frekwentie $\omega_\kappa = \text{konstant}$ met $\omega_\kappa < \frac{\omega_s}{2}$ is een lijn in het p -vlak die evenwijdig loopt met de reële as. In het z -vlak gaat deze lijn over in een halfrechte vanuit de oorsprong (zie fig. 10.4). De eis dat de polen van het gesloten systeem binnen de halflijnen voor $\omega = \omega_\kappa$ en $\omega = -\omega_\kappa$ in het z -vlak liggen betekent dat de frekwentie van het overgangsverschijnsel maximaal ω_κ zal bedragen.

10.3.3. Ontwerpkriteria voor stapresponsies

Gebruikelijke criteria die betrekking hebben op de stapresponsie zijn: max. percentage doorslingering, peiktijd, aantal oscillaties van het overgangsverschijnsel, stijgtijd, responsietijd, indikatietijd. Deze criteria worden in monografie III gedefinieerd.

Voor systemen met signaalbemonstering kunnen dezelfde criteria worden gebruikt, indien men ook de responsie tussen de bemonsteringstijdstippen kent. Indien slechts wordt uitgegaan van de responsiewaarden op de bemonsteringstijdstippen kan het voorkomen dat bepaalde oscillaties of opslingeren in het signaal over het hoofd gezien worden.

Voor tweede orde systemen bestaat er een verband tussen de relatieve demping ζ en het percentage doorslingering $X_{\max} = \frac{c_{\max}}{c_\infty} \times 100\%$ en de peiktijd T_p (zie fig. 10.5).

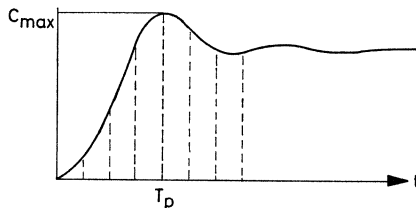


Fig. 10.5

In [10.1 en 10.2] is voor de overdrachtsfunctie

$$G(z) = \frac{K^1(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

het verband aangegeven tussen de ligging van z_1 ,

p_1 en p_2 enerzijds en X_{\max} en T_p anderzijds. Hierbij zijn de gevallen onder-

scheiden dat het nulpunt op de positieve of negatieve reële as in het z -vlak ligt:

Door eisen te stellen aan ζ , T_p en X_{\max} kan men de ligging van z_1 , p_1 en p_2 bepalen (zie Fig. 10.7).

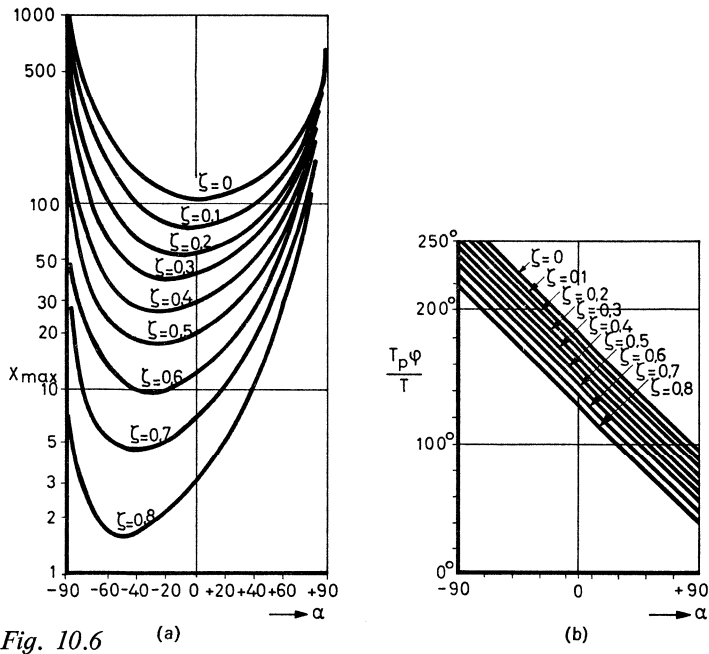


Fig. 10.6 (a)

(b)

Voorbeeld 10.1

Stel $\zeta = 0,6$, $X_{\max} < 10\%$, $T_p = 5$ sec. en $T = 1$ sec.

Uit fig. 10.6a volgt $\alpha = -20^\circ$, voor $\zeta = 0,6$ en $X_{\max} = 10\%$.

ϕ (zie Fig. 10.7) kan nu bepaald worden uit fig. 10.6b,

$$\text{nl. } \phi = \frac{T}{T_p} = \frac{160^\circ}{5} = 32^\circ = 0,18\pi.$$

Uit de gegeven ϕ en α kan men dan p_1 , p_2 en z_1 bepalen.

Er geldt immers $p_1 = |p|e^{j\phi}$

$$\text{en } p_1 = e^{-\zeta\omega_n T} e^{-j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{of} \quad \phi = +\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\phi}{T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\text{zodat } |p| = e^{-\zeta\omega_n T} = e^{-\frac{\phi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{2}{3}\phi} \quad \text{voor } \zeta = 0,6.$$

Hieruit volgt $|p| = 0,65$ of $p_{1,2} = 0,55 \pm j0,34$.

Vervolgens dient de ligging van het nulpunt bepaald te worden. Hiervoor gebruikt men de formules $\alpha = \gamma - \theta_2$ en $\alpha = -(\theta_2 + \theta_1 - \frac{\pi}{2})$ (zie fig. 10.7).

Bovendien geldt $\gamma + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ zodat

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

γ kan hieruit berekend worden, want $\theta_1 = \text{bgtg} \frac{0,34}{0,45} = 37^\circ$, zodat $\gamma = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ en $\theta_2 = 53^\circ - 20^\circ = 33^\circ$.

De afstand x volgt uit $x = \frac{y}{\text{tg}_2} = 0.52$.

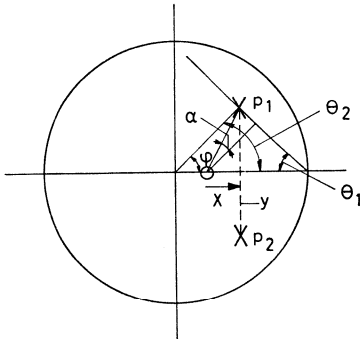


Fig. 10.7

10.3.4. Integraalkriteria

Om het gedrag van systemen kwalitatief te kunnen vergelijken is het mogelijk uit te gaan van zogenaamde integraalkriteria zoals

$$\int_0^{\infty} e^2 dt, \int_0^{\infty} |e| dt \text{ en } \int_0^{\infty} |e|t dt \text{ waarin } e \text{ het foutsignaal is dat}$$

ontstaat uit de vergelijking van de gewenste en de gemeten waarden.

Uitgaande van een bepaalde systeemconfiguratie b.v. een proces met de overdrachtsfunctie $H_s(p) = K_1 \frac{e^{-pT_D}}{p\tau_1 + 1}$ kunnen dan de parameters van een PI of PID-regelaar zodanig worden ingesteld dat één van de integraalkriteria minimaal is. Hieruit zijn voor continue systemen o.a. de Ziegler-Nichols instelregels voortgekomen. Voor systemen met signaalbemonstering zijn soortgelijke instelregels afgeleid. In deze regels moet de bemonsterings-tijd T nog als extra parameter worden meegenomen.

In par. 10.6 zal op het gebruik van gediskretiseerde PID-regelaars nader worden ingegaan.

Indien slechts informatie over het systeem gegeven is op de bemonsterings-tijdstippen worden sommatiekriteria gebruikt i.p.v. integraalkriteria, zoals:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^2(nT), \sum_{n=0}^{\infty} |e(nT)| \text{ en } \sum_{n=0}^{\infty} |e(nT)| nT \quad (10-3)$$

Voor $\sum_{n=0}^{\infty} e^2(nT)$ kan met het theorema van Parseval een gesloten uitdrukking gevonden worden (zie hoofdstuk V).

Indien een optimale regeling dient te worden bepaald gaat men uit van de beschrijving van het systeem in toestandsvergelijkingen en wordt vaak een zogenaamd kwadratisch kostenkriterium gebruikt van de vorm

$$\int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt, \quad (10-4)$$

hierin is \underline{x} de toestandsvektor en \underline{u} de vektor van ingangssignalen (zie hoofdstuk XII). Q is een semi-definiet positieve en R een definiet positieve matrix.

Voor systemen met signaalbemonstering wordt wel i.p.v. het kwadratisch integraalkriterium het volgende kriterium gebruikt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \underline{x}(nT)^T Q \underline{x}(nT) + \underline{u}(nT)^T R \underline{u}(nT) \} \quad (10-5)$$

10.3.5. Gevoeligheidscoëfficiënten als criteria

Voor systemen met signaalbemonstering kan ook het begrip gevoeligheid gehanteerd worden, zoals dit voor continue systemen in monografie I gedefinieerd is.

De volgende definitie wordt gebruikt voor kleine parametervariaties a . De gevoeligheidsfaktor $S_a^{G(z)}$ is de relatieve verandering van de overdrachtsfunctie $G(z)$ gedeeld door de relatieve verandering van de parameter a .

$$S_a^{G(z)} = \frac{a}{G(z)} \frac{dG(z)}{da} \quad (10-6)$$

De parameter a kan een parameter zijn van het oorspronkelijk continue systeem dat bemonsterd wordt, of een parameter in het z -getransformeerde systeem.

$$\text{Indien } G_1(p) = \frac{K_1}{p+a} \text{ wordt } Z\{G_{h0} G_1(p)\} = K_1 \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} = G(z)$$

$$\text{of indien } e^{-aT} = b \text{ gesteld wordt: } G(z) = K_1 \frac{1-b}{z-b}.$$

$$\text{Er geldt dan } S_a^{G(z)} = S_a^b S_b^{G(z)}. \quad (10-7)$$

Voorbeeld 10.2

$$\text{Bepaal } S_a^{G(z)} \text{ indien } G(z) = K_1 \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} = K_1 \frac{1-b}{z-b}$$

$$\begin{aligned} \text{a. rechtstreeks: } S_a^{G(z)} &= \frac{a}{G(z)} \frac{dG(z)}{da} = \frac{a(z - e^{-aT})}{1 - e^{-aT}} \frac{Te^{-aT}(z-1)}{(z - e^{-aT})^2} \\ &= \frac{aTe^{-aT}(z-1)}{(1 - e^{-aT})(z - e^{-aT})} = \frac{aTb(z-1)}{(1-b)(z-b)} \end{aligned}$$

b. via de regel $S_a^{G(z)} = S_a^b S_b^{G(z)}$ waarin:

$$S_b^{G(z)} = \frac{b}{G(z)} \frac{dG(z)}{db} = \frac{b(z-b)}{1-b} \cdot \frac{-(z-1)}{(z-b)^2} = \frac{-b(z-1)}{(1-b)(z-b)}$$

$$\text{en } S_a^b = \frac{a}{b} \frac{de^{-aT}}{da} = -aT$$

$$\text{Hieruit volgt: } S_a^{G(z)} = \frac{aTb(z-1)}{(1-b)(z-b)}$$

Voor lage frekventies geldt: $z \rightarrow 1$ en is dus $S_b^{G(z)} = 0$

Voor de frekventie $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ geldt $z \rightarrow -1$ en is dus $S_b^{G(z)} = \frac{-2b}{1-b^2}$.

Voor kleine waarden van b , dus voor grote waarden van a wordt $S_b^{G(z)} \approx 0$.

Voor $b \rightarrow 1$, dus voor $a \rightarrow 0$ wordt $S_b^{G(z)} \approx \frac{-(1-aT)}{aT}$ en is de gevoeligheid

dus groot.

Indien de gevoeligheid van het gesloten systeem $H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$ wordt bepaald geldt:

$$S_b^{H(z)} = \frac{b}{H(z)} \frac{dH(z)}{db} \quad \text{met} \quad H(z) = \frac{K_1(1-b)}{z-b+(1-b)K_1}$$

$$\text{Hieruit volgt } S_b^{H(z)} = \frac{-b(z-1)}{(1-b)(z-b+K_1-bK_1)}$$

Voor lage frekventies geldt $S_b^{H(z)} = 0$ en voor hoge frekventies ($\omega = \frac{\omega_s}{2}$) geldt:

$$S_b^{H(z)} = \frac{-2b}{(1-b)(1+b-K_1+bK_1)}$$

Voor kleine waarden van b geldt weer $S_b^{H(z)} = 0$ maar voor $b \rightarrow 1$ geldt

$$S_b^{H(z)} = \frac{-2b}{1-b^2}$$

Het verschil tussen het open en gesloten systeem komt tot uitdrukking door

$$\text{te bepalen } S = \frac{S_b^{G(z)}}{S_b^{H(z)}} \quad (10-8)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{-b(z-1)}{(1-b)(z-b)} \cdot \frac{(1-b)(z-b+K_1-bK_1)}{-b(z-1)} \\ &= \frac{z-b+K_1-bK_1}{z-b} = 1+K_1 \frac{(1-b)}{z-b} = 1+G(z) \end{aligned}$$

d.w.z. de gevoeligheid voor variaties in b is in het teruggekoppelde systeem kleiner dan in het open systeem, daar in het normale werkgebied van het systeem $|G(z)| \gg 1$.

Daar voor een eerste orde systeem, zoals hiervoor behandeld is geldt $S_T^{G(z)} = S_a^{G(z)}$, kunnen dezelfde konklusies t.a.v. de parameter T getrokken worden als t.a.v. de parameter a .

De voorgaande definitie van gevoeligheid geldt alleen voor *kleine* variaties in de parameters. Voor grote variaties is de gevoeligheidsfaktor als volgt gedefinieerd:

$$S_A^G = \frac{\Delta G}{G} \cdot \frac{A}{\Delta A} \text{ waarin } \Delta A \text{ de variatie in de parameter } A \text{ is en } \Delta G \text{ de variatie in de overdrachtsfunctie:}$$

Als G_0 en A_0 nominale waarden zijn geldt:

$$G = G_0 + \Delta G \quad \text{en} \quad A = A_0 + \Delta A$$

Als wordt uitgegaan van het teruggekoppelde systeem:

$$H(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

kan de gevoeligheidsfaktor voor een variatie in $G(z)$ t.g.v. een parameter-variatie, in de totale overdrachtsfunctie $H(z)$ als volgt berekend worden:

$$\begin{aligned} S_G^H &= \frac{\Delta H}{H} \frac{G}{\Delta G} = \frac{\Delta H}{\Delta A} \frac{A}{H} \cdot \frac{\Delta A}{\Delta G} \frac{G}{A} \\ &= S_A^H \cdot S_G^A \end{aligned}$$

Stel $H = H_0 + \Delta H$ met $G = G_0 + \Delta G$ dan geldt:

$$S_G^H = \frac{\Delta H}{H} \frac{G}{\Delta G} = \frac{H-H_0}{H} \cdot \frac{G}{G-G_0} \quad \text{met} \quad H = \frac{G(z)D(z)}{1+G(z)D(z)}$$

$$\text{en } H_0 = \frac{G_0(z)D(z)}{1+G_0(z)D(z)} \quad \text{dus}$$

$$S_G^H = \left[\frac{G(z)D(z)}{1+G(z)D(z)} - \frac{G_0(z)D(z)}{1+G_0(z)D(z)} \right] \frac{G(z)(1+D(z)G(z))}{G(z)D(z)(G(z)-G_0(z))}$$

$$= \frac{1}{1+G_0(z)D(z)} \quad (10-9)$$

Hoe groter $G_0(z)D(z)$ is, des te beter worden variaties in de voorwaartse weg weggeregeld.

10.3.6. Compensatienetwerken en regelaars

Met behulp van digitale of analoge compensatienetwerken en regelaars is het mogelijk het gedrag van de regelkring aanzienlijk te wijzigen.

Evenals bij continue regelkringen heeft men de keuze uit een groot aantal mogelijke compensatienetwerken en regelaars.

De bekendste zijn: differentiërend en integrerend netwerk of een combinatie hiervan en regelaars met proportionele, integrerende en differentiërende actie (P-, I-, PI-, PD- en PID-regelaars).

In het frekwentiedomein heeft een differentiërend resp. integrerend netwerk de volgende vorm.

$$D(w) = \frac{1+a\tau w}{1+\tau w} \quad \text{met } a > 1 \quad (\text{differentiërend netwerk}) \quad (10-10)$$

$$D(w) = \frac{1+a\tau w}{1+\tau w} \quad \text{met } a < 1 \quad (\text{integrerend netwerk}) \quad (10-11)$$

Door deze netwerken terug te transformeren naar het z -domein met $w = \frac{z-1}{z+1}$, ontstaat het volgende netwerk:

$$D(z) = \frac{a\tau+1}{\tau+1} \frac{z + \frac{1-a\tau}{1+a\tau}}{z + \frac{1-\tau}{1+\tau}} \quad \text{met } a > 1 \quad \text{voor een differentiërend netwerk en}$$

$a < 1$ voor een integrerend netwerk. De ligging van de pool wordt bepaald door τ en de ligging van het nulpunt door τ en a .

In het geval van een *differentiërend* netwerk ligt het nulpunt altijd rechts van de pool in het z -vlak en bij een *integrerend* netwerk ligt het nulpunt altijd links van de pool in het z -vlak.

Voor het ontwerpen van compensatienetwerken in het w -domein (frekwentieresponsiemethode) bestaan vuistregels die in monografie II zijn afgeleid en die op dezelfde wijze kunnen worden toegepast bij de frekwentie-karakteristieken in $j\omega_w$. Het ontwerpen van compensatienetwerken in het z -domein met behulp van de polen- en nulpuntenmethode is vooral gericht

op het realiseren van een gewenst overgangsverschijnsel. Het ontwerpen van een differentiërend netwerk is daarom direkt met deze methode mogelijk, terwijl de keuze van een integrerend netwerk op indirecte wijze plaats vindt, daar het verband tussen K en de poolbaanversterking K^1 essentieel is.

In het geval van continue systemen wordt als integrerend netwerk een dipool (dichtbij elkaar liggende pool en nulpunt) gekozen dichtbij de oorsprong van het p -vlak. Voor bemonsterde systemen betekent dit een pool en een nulpunt dicht bij het punt $z = 1$.

De toepassing van differentiërende netwerken bij systemen met signaalbemonstering is beperkt door de sterke fasedraaiing voor frekwenties dichtbij een fasedraaiing van -180° .

10.4 KOMPENSATIE MET KONTINUE NETWERKEN EN REGELAARS

Bij continue systemen waarin een compensatienetwerk met overdrachtsfunctie $G_c(p)$ is opgenomen (zie fig. 10.8) komt $G_c(p)$ expliciet voor in de overdrachtsfunctie van het gehele systeem.

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G_c(p) G_1(p)}{1 + G_c(p) G_1(p)} \quad (10-12)$$

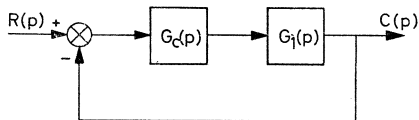


Fig. 10.8

Indien een kontinu netwerk met overdrachtsfunctie $G_c(p)$ wordt opgenomen in een systeem met signaalbemonstering (zie fig. 10.9), waarin $G_h(p)$ een houdschakeling is, dan komt de overdrachtsfunctie G_c impliciet voor in de overdrachtsfunctie van het gehele systeem

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_h G_c G_1(z)}{1 + G_h G_c G_1(z)} \quad (10-13)$$

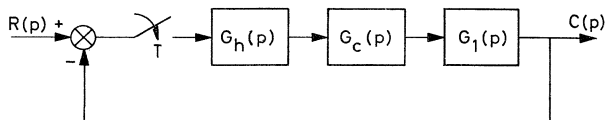


Fig. 10.9

Het ontwerpen van een analoog compensatienetwerk in een systeem met signaalbemonstering is daarom niet zo eenvoudig als in een continu systeem,

doordat de bijdragen van $G_h(p)$, $G_c(p)$ en $G_1(p)$ in de frekwentieresponsiemethode en polen- en nulpuntenmethode niet te scheiden zijn. Hierdoor zijn de gevolgen van wijzigingen in $G_c(p)$ niet direkt te overzien.

De volgende methoden worden wel toegepast om $G_c(p)$ te bepalen.

1. Benaderingsmethoden, waarbij het bemonsterde systeem vaak opgevat wordt als een continu systeem met een extra dode tijd van $\frac{1}{2}T$ sec (zie hoofdstuk VIII).
2. Ontwerpmethoden, waarbij een vergelijking plaats vindt met een konfiguratie volgens fig. 10.10.

Indien de benaderingsmethode wordt toegepast vindt het ontwerp plaats alsof het systeem continu is en zijn de ontwerpmethoden voor continu systemen zonder meer bruikbaar.

Indien het ontwerp volgens de tweede methode plaats vindt kan men de volgende stappen onderscheiden:

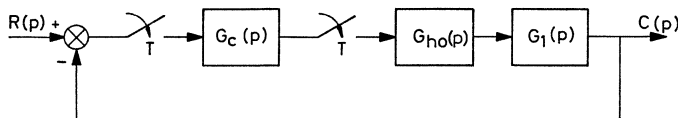


Fig. 10.10

- a. Via $Z[G_{h0}(p)G_1(p)]$ en $z = \frac{1+w}{1-w} \Big|_{w=j\omega_w}$ wordt eerst het bodediagram

voor het niet-gecompenseerde systeem verkregen.

- b. Aan de hand van de specificatie zoals fasemarge, versterkingsmarge, bandbreedte e.d. wordt een filter $G'_c(j\omega_w)$ ontworpen.

Er geldt dus *niet* dat $Z^{-1}[G'_c(w)] \Big|_w = \frac{1+z}{1-z} = G_c(p)$

- c. De overdrachtsfunctie $G'_c(w)G_{h0}G_1(w)$ voldoet aan de gestelde eisen. Er moet gelden dat $G_{h0}G_cG_1(w)$ aan dezelfde eisen voldoet d.w.z.:

$$Z[G_{h0}(p)G_c(p)G_1(p)] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_c(p)G_1(p)}{p}\right]$$

$$(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_c(p)G_1(p)}{p}\right] = G'_c(z)G_{h0}G_1(z) \text{ aangezien}$$

$$Z[G_{h0}G_{c1}G_1] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_cG_1}{p}\right]$$

Of na w -transformatie:

$$G_{h0}G_cG_1(w) = \frac{2w}{1+w}Z\left[\frac{G_c(p)G_1(p)}{p}\right] \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = G'_c(w)G_{h0}G_1(w)$$

zodat:

$$Z \left[\frac{G_c(p) G_1(p)}{p} \right] = \frac{1+w}{2w} \cdot G_c^1(w) G_{h0} G_1(w) \quad (10-14)$$

Breuksplitsing van het rechterlid van de laatste vergelijking en gebruikmaking van tabel X-2, levert de uitdrukking $G_c(p) G_1(p)/p$.

Vermenigvuldiging hiervan met $p/G_1(p)$ geeft de overdrachtsfunctie van het filter $G_c(p)$. Wanneer $G_1(p)$ één of twee polen $p=0$ heeft, moeten de factoren $(1-w)$ respectievelijk $(1-w)(1+w)$ eerst uit $G_{h0} G_c G_1(w)$ worden uitgedeeld voordat breuksplitsing mag worden toegepast.

d. Uit $G_c^1(w)$ volgt niet direkt of $G_c(p)$ realiseerbaar is. Als $G_c(p)$ meer nulpunten dan polen heeft moet men polen toevoegen; men kiest hiervoor reële polen die relatief ver naar links liggen in het complexe p -vlak.

Als $G_c(p)$ realiseerbaar moet zijn met R, C elementen dan moet $G_c^1(w)$ voldoen aan de eis dat de polen ervan moeten liggen tussen 0 en -1 op de reële as in het w -vlak; de nulpunten mogen overal in het w -vlak liggen.

Deze methode vereist vele bewerkingen en is aanzienlijk bewerklijker dan de kompensatie met een digitaal netwerk (zie paragraaf 10.5).

Voorbeeld 10.2

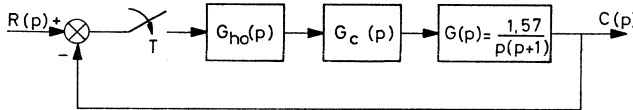


Fig. 10.11

Voor het systeem van fig. 10.11 wordt vereist een analoog filter $G_c(p)$ te ontwerpen, zodanig dat de fasemarge minstens 45° is en de versterkingsmarge niet minder dan $6dB$ is. Verder mag K_v niet verkleind worden. $T = 1,57$.

$$a. G_{h0} G(z) = (1-z^{-1}) Z \left[\frac{1,57}{p^2(p+1)} \right] = 1,57 \cdot \frac{(0,778z+0,465)}{(z-1)(z-0,208)}$$

$$G_{h0} G(w) = G_{h0} G(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = 1,57 \cdot \frac{(0,313w+1,234)(1-w)}{2w(1,208w+0,792)}$$

Het bodediagram hiervoor is gegeven in figuur 10.12.

De fasemarge van het niet gekompenseerde systeem is bijna nul:

$$\begin{aligned} \text{voor } \omega_w = 0,9 \text{ is } \varphi \approx -180^\circ. K_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1) \cdot \frac{1,57(0,778z+0,465)}{(z-1)(z-0,208)} \\ &= \frac{0,778+0,465}{1-0,208} = 1,57 \end{aligned}$$

b. Uit het diagram is te zien dat voor $\omega_w \approx 0,4$ rad/sec. de fase ongeveer gelijk is aan -135° . Men zou aan de eisen voor versterkings- en fasemarge kunnen voldoen door de versterkingsfactor van $G(p)$ te verkleinen. Dit zou echter ook K_v slechter maken. Volgens monografie II voldoet een integrerend netwerk aan de eisen indien de hoogste knikfrequentie een dekade lager ligt dan $\omega_w = 0,4$ rad/sec. en de verzwakkingsfactor voor hoge frequenties 3 bedraagt. De nieuwe „cross-over” frequentie valt op $\omega_w = 0,4$ rad/sec. zodat versterkings- en fasemarge de gewenste waarden hebben. Het laagfrequentie deel van de frequentieresponsie wordt niet beïnvloed zodat K_v onveranderd blijft.

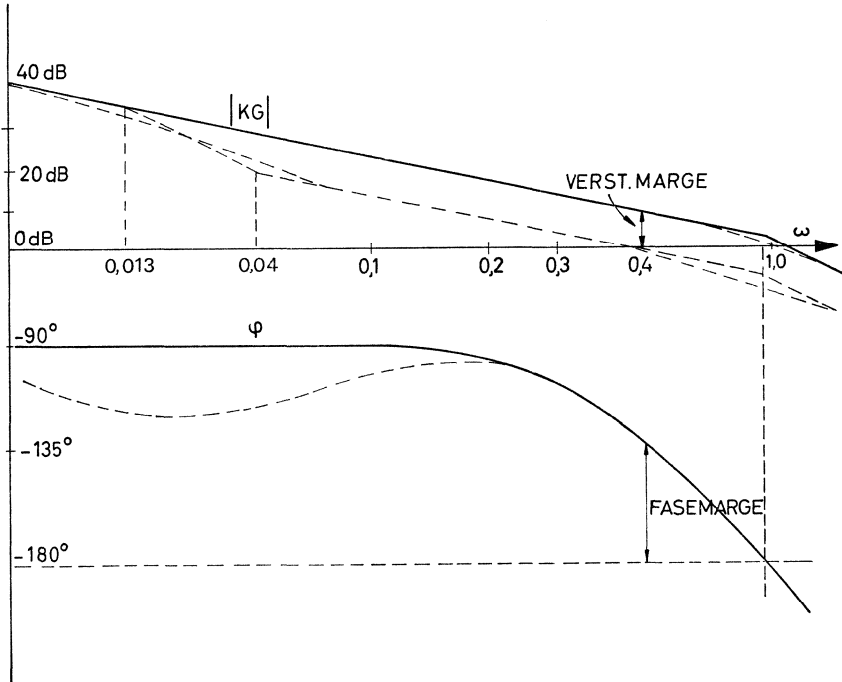


Fig. 10.12

Voor $G_c^1(w)$ verkrijgt men dus:

$$G_c^1(w) = \frac{w + 1/25}{w + 1/75}$$

c. $Z \left\{ \frac{G_c(p) G(p)}{p} \right\} \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \frac{1+w}{2w} G_c^1(w) G_{h0} G(w)$

Omdat $\frac{G(p)}{p}$ twee polen $p = 0$ heeft moet breuksplitsing worden toegepast op

$$\frac{G_c^1(w) G_{h0} G(w)}{(1-w)}$$

dus:

$$\begin{aligned} \frac{G_c^1(w) G_{h0} G(w)}{(1-w)} &= \frac{1}{(1-w)} \cdot 3 \cdot \frac{(1+25w)(1,23)(1-w)}{w(1,525w+1)(1+75w)} \\ &= 3,69 \left[\frac{1}{w} + \frac{-50,868}{(1+75w)} + \frac{-0,407}{(1+1,525w)} \right], \end{aligned}$$

zodat:

$$\begin{aligned} Z \left[\frac{G_c(p) G(p)}{p} \right] \Bigg|_{z = \frac{1+w}{1-w}} &= \frac{(1+w)(1-w)}{2w} \cdot (3,69) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{w} - \frac{50,868}{1+75w} - \frac{0,407}{1+1,525w} \right\} \end{aligned}$$

Uit tabel X-2 vindt men dan:

$$\frac{G_c(p) G(p)}{p} = 3,69 \left\{ \frac{2}{p^2} - \frac{(50,868)(0,0172)}{p(p+0,0172)} - \frac{(0,407)(0,995)}{p(p+1)} \right\}$$

Door beide zijden met $p/G(p)$ te vermenigvuldigen ontstaat:

$$G_c(p) = 4,9 \frac{(1+0,64p)(1+31p)}{(1+58p)}$$

Tabel X.2

Laplace	z-transformatie	w-transformatie
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1+w}{w}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T(1+w)(1-w)}{4w^2}$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1+w}{(1-e^{-aT}) \left(1+w \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \right)}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{(1+w)(1-w)}{2w \left(1+w \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \right)}$

d. Omdat $G_c(p)$ meer nulpunten heeft dan polen is het filter niet fysisch realiseerbaar. Dit kan verholpen worden door toevoeging van een extra pool (b.v. $p = -25$).

Het filter wordt hiermee:

$$G_c(p) = 4,9 \frac{(1+0,64p)(1+31p)}{(1+58p)(1+0,04p)}$$

10.5 KOMPENSATIE MET DIGITALE NETWERKEN

Indien een digitaal netwerk wordt opgenomen in een continu systeem dient het zowel voorafgegaan als gevolgd te worden door een schakelaar. Schakelaar S_1 is te interpreteren als een AD omzetter en schakelaar S_2 in combinatie met een nulde orde houdschakeling als een DA omzetter (fig. 10.13).

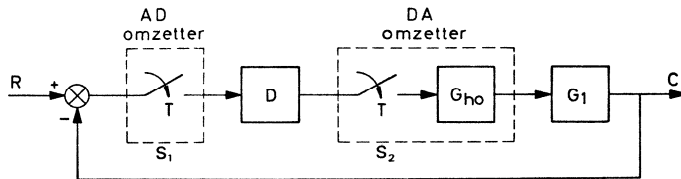


Fig. 10.13

Het digitale netwerk D kan b.v. een „special” of „general purpose” digitale rekenmachine zijn. D kan echter ook uitgevoerd worden als een analoog netwerk meestal voorafgegaan door een houdschakeling (zie fig. 10.14). Een dergelijke uitvoering van de compensator wordt „pulsed data network” genoemd.

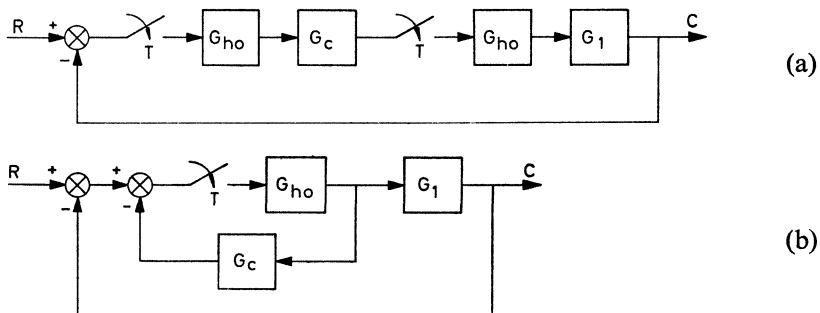


Fig. 10.14

De configuratie van fig. 10.14a. noemt men de serieschakeling.

De overdrachtsfunctie van het systeem luidt:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_{h0} G_c(z) G_{h0} G_1(z)}{1 + G_{h0} G_c(z) G_{h0} G_1(z)} \quad (10-15)$$

Hierin kan $G_{h0} G_c(z)$ gelijk gesteld worden aan $D(z)$

$$\text{Dus: } D(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_c(p)}{p} \right\} \quad \text{of} \quad Z \left\{ \frac{G_c(p)}{p} \right\} = \frac{z}{z-1} D(z)$$

De configuratie van fig. 10.14 b noemt men de terugkoppelschakeling.
De overdrachtsfunctie van het systeem luidt:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z) G_{h0} G_1(z)}{1 + D(z) G_{h0} G_1(z)} \quad \text{met} \quad D(z) = \frac{1}{1 + G_{h0} G_c(z)} \quad (10-16)$$

$$\text{Er geldt dan: } G_{h0} G_c(z) = \frac{1 - D(z)}{D(z)} \quad \text{of}$$

$$Z \left[\frac{G_c(p)}{p} \right] = \frac{z}{z-1} \frac{1 - D(z)}{D(z)}$$

Voorbeeld 10.3

Realisatie met serieschakeling.

$$\text{Gegeven: } D(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,2z^{-1}}; \quad T = 1 \text{ sec.}$$

Een serieschakeling met een analoog filter volgens figuur 10.14a volgt uit

$$Z \left[\frac{G_c(p)}{p} \right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,2z^{-1}} = \frac{0,625}{1 - z^{-1}} + \frac{0,375}{1 - 0,2z^{-1}}$$

hieruit volgt:

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{0,625}{p} + \frac{0,375}{p + 1,61} = \frac{p + 1}{p(p + 1,61)}$$

$$\text{Dus } G_c(p) = \frac{p + 1}{p + 1,61}$$

Als $G_c(p)$ met een RC netwerk moet worden gerealiseerd dan moeten de polen van $G_c(p)$ enkelvoudig zijn en op de negatief reële as liggen (oorsprong en $-\infty$ zijn hierbij uitgesloten); de nulpunten mogen overal in het p -vlak liggen. Voor $D(z)$ betekent dit dat vereist moet worden:

- het aantal polen van $D(z)$ moet groter dan of gelijk zijn aan het aantal nulpunten
- de polen van $D(z)$ moeten enkelvoudig en positief reëel zijn met waarden $0 < z < 1$.

In dit voorbeeld is hieraan voldaan.

Indien het bij een terugkoppelschakeling gewenst is dat $G_c(p)$ met RC elementen moet worden gerealiseerd, moeten aan $D(z)$ de volgende eisen worden gesteld.

- a. $D(z)$ moet een gelijk aantal polen en nulpunten hebben
- b. de nulpunten van $D(z)$ moeten enkelvoudig en positief reëel zijn met waarden $0 < z < 1$.

Wanneer de polen van $D(z)$ niet alle voldoen aan de voorwaarden voor de serieschakeling, en de nulpunten niet alle voldoen aan de voorwaarden van de terugkoppelschakeling dan kan men $D(z)$ vaak schrijven als het produkt van twee functies $D_1(z)$ en $D_2(z)$ zodanig dat beide realiseerbaar zijn. Kaskadeschakeling van de twee schakelingen levert dan het gewenste filter.

Indien $D(z)$ een digitaal netwerk is, kan $D(z)$ eenvoudig ontworpen worden zoals blijkt uit de totale overdrachtsfunctie van het systeem volgens fig. 10.13.

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z) G_{h0} G_1(z)}{1 + D(z) G_{h0} G_1(z)} \quad (10-17)$$

De bijdrage van $D(z)$ tot de frekwentiekarakteristiek of het polen- en nulpuntenbeeld van het systeem is duidelijk gescheiden van de bijdrage van de overige delen van het systeem.

Indien men $D(z)$ ontwerpt met behulp van de polen- en nulpuntenmethode kan men de polen en nulpunten van $D(z)$ toevoegen aan het polen- en nulpuntenbeeld van $G_{h0} G_1(z)$ en met de poolbaanmethode het systeem verder in het z -vlak ontwerpen. Indien men $D(z)$ ontwerpt met behulp van de frekwentieresponsiemethode, gaat men als volgt te werk:

- a. Bepaal de w -transformatie $G_{h0} G(w)$ en teken het hierbij behorende bodediagram.
- b. Indien uit het bodediagram blijkt dat compensatie nodig is, voeg dan een filter $D(w)$ toe zodat aan de gestelde eisen is voldaan. De bekende methoden voor continue systemen zijn hierbij van toepassing (zie ook voorbeeld 10.2).
- c. De diskrete overdrachtsfunctie van het filter volgt nu direkt door in $D(w)$ te substitueren $w = \frac{z-1}{z+1}$.

Voorbeeld 10.4

Dit is hetzelfde voorbeeld als voorbeeld 10.2, nu echter voorzien van een digitaal netwerk.

Met behulp van een digitaal netwerk moet het systeem van fig. 10.15 voldoen aan dezelfde eisen als in voorbeeld 10.2 gesteld zijn.

Uit stappen a en b van voorbeeld 10.2 bleek dat het filter $G_c^1(w) = \frac{w + 1/25}{w + 1/75}$ aan de gestelde eisen voldeed. In dit geval geldt $D(w) = G_c^1(w)$.

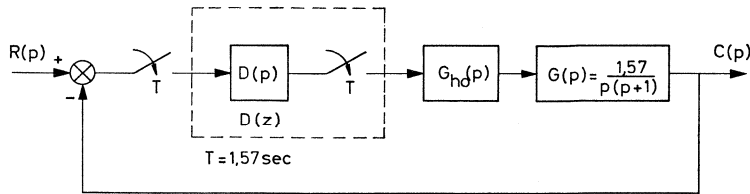


Fig. 10.15

Hieruit kan dus direct het digitale filter $D(z)$ worden afgeleid door in $G_c^1(w)$ te stellen $w = \frac{z-1}{z+1}$.

Het resultaat hiervan is:

$$D(z) = G_c^1(w) \Big|_{w = \frac{z-1}{z+1}} = 3 \cdot \frac{26z - 24}{76z - 74} = \frac{78 - 72z^{-1}}{76 - 74z^{-1}}$$

Voorbeeld 10.5 (zie Fig. 10.16). $T = \ln 2$.

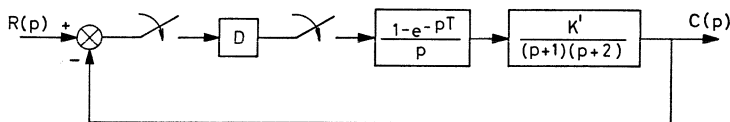


Fig. 10.16

$$G(z) = \frac{\frac{K^1}{8} (z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

1. Kies $D(z) = \frac{z - 0,95}{z - 0,98}$ (integrerend netwerk).

Door de plaatsing van deze extra pool en dit nulpunt vlak bij elkaar, verandert de poolbaan nauwelijks van vorm en wordt slechts een tak tussen $z = 0,98$ en $z = 0,95$ toegevoegd (fig. 10.17).

De versterking is echter met een faktor $\frac{1 - 0,95}{1 - 0,98} = 2,5$ toegenomen,

2. Kies $D(z) = \frac{(z+1) + 5\tau(z-1)}{(z+1) + \tau(z-1)}$ en $K^1 = 8$ (differentiërend netwerk met $a = 5$)

Bepaal nu de poolbaan voor variatie van τ .

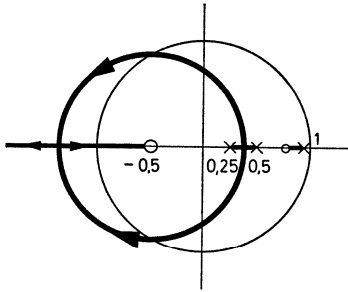


Fig. 10.17

De poolbaanvergelijking luidt:

$$D(z)G(z)+1 = 0$$

$$\frac{(z+1) + 5\tau(z-1)}{(z+1) + \tau(z-1)} \cdot \frac{(z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} + 1 = 0$$

$$(z+1)(z+\frac{1}{2}) + 5\tau(z-1)(z+\frac{1}{2}) + (z+1)(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2}) + \tau(z-1)(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2}) = 0$$

$$(z+1)(z+\frac{1}{2}+z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}) + \tau(z-1)(5z+\frac{5}{2}+z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}) = 0$$

$$\frac{(z-1)(z-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}j\sqrt{111})(z-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}j\sqrt{111})}{(z+1)(z-\frac{5}{16}+\frac{1}{16}j\sqrt{23})(z-\frac{5}{16}-\frac{1}{16}j\sqrt{23})} = -\frac{1}{\tau}$$

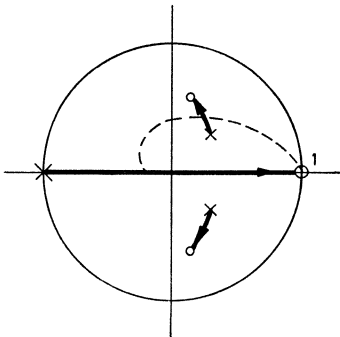


Fig. 10.18

In fig. 10.18 is tevens gestippeld aangegeven de relatieve dempingslijn voor $\zeta = 0,7$. Het snijpunt met deze lijn geeft de waarde van τ die gekozen moet worden, opdat het overgangsverschijnsel uitdempt met de bij deze waarde van de demping behorende overshoot van 4 à 6%.

In algemene vorm kan $D(z)$ als volgt beschreven worden

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}} = \frac{X_2(z)}{X_1(z)} \quad (10-18)$$

b_0 wordt vaak 1 gekozen maar b_0 mag niet nul gekozen worden omdat het netwerk anders niet realiseerbaar is.

Ten opzichte van een analoog compensatienetwerk heeft realisatie van $D(z)$ vooral met een digitale rekenmachine de volgende voordelen:

1. De waarden van de parameters a_i en b_j kunnen binnen een groot gebied ingesteld worden. Er is geen begrenzing in verband met de dimensionering van bepaalde componenten (beperkte grootte van de condensatorwaarde, het vermijden van inductieve elementen). Bovendien is het mogelijk de parameters a_i en b_j eenvoudig te wijzigen en eventueel snel te variëren als $D(z)$ is opgenomen in een adaptief regelsysteem. Het waardebereik van a_i en b_j wordt bepaald door de woordlengte van de rekenmachine.
2. De parameters a_i en b_j behouden exakt hun waarden totdat opdracht wordt gegeven nieuwe waarden in te lezen. Het wegdrijven van parameterwaarden is niet mogelijk.
3. Indien een van de parameters a_i of b_j wordt gewijzigd, worden de overige parameters hierdoor niet beïnvloed. Er is geen interactie tussen de diverse parameters.
4. De flexibiliteit van $D(z)$ is groot. Het toevoegen van extra termen in $D(z)$ heeft slechts invloed op de rekentijd. Het is niet nodig voor $D(z)$ voorgescreven configuraties te kiezen uit economische overwegingen, of uit overwegingen in verband met de praktische realisatie van het netwerk, zoals bij analoge compensatienetwerken. Het rekenmachineprogramma moet echter voldoende flexibel zijn.

Deze voordelen zijn terug te voeren op de twee belangrijkste eigenschappen van een digitale rekenmachine t.o.v. analoge bewerkingen n.l. de mogelijkheid van het nemen van beslissingen en de geheugenwerking.

Natuurlijk zijn aan het gebruik van digitale rekenmachines ook enkele nadelen verbonden:

1. Door de centralisatie van de regelaars in de digitale rekenmachine is het nodig extra aandacht te besteden aan de aanpassing van de rekenmachine aan de te regelen systemen of regelkringen. De volgende extra bewerkingen

- zijn hiervoor nodig. AD, DA omzetting, multiplexing, signaalkonversie en -versterking, filteren van hoogfrequent ruis (zie hoofdstuk XI).
2. In het algemeen is een digitale regeling duurder tenzij door timesharing een groot aantal regelkringen of systemen bediend kunnen worden en de rekenmachine tevens voor andere taken wordt gebruikt (monitoring, alarmscanning, datalogging).
 3. Extra aandacht dient besteed te worden aan noodregelingen (back up regelingen) indien de digitale rekenmachine mocht uitvallen als regel-eenheid.
 4. De geïntroduceerde rekentijd kan een extra tijdvertraging introduceren of het aantal regellussen dat kan worden aangesloten beperken.
 5. Kwantiseringruis die onherroepelijk door een digitaal systeem geïntroduceerd wordt kan aanleiding geven tot grote fouten vooral wanneer b.v. kleine getallen van elkaar afgetrokken moeten worden.

De realisatie van $D(z)$ met behulp van een digitale rekenmachine kan op vele wijzen gebeuren.

Van belang is hierbij het aantal rekenbewerkingen (optellen of aftrekken vermenigvuldigen en schuifbewerkingen) en het aantal benodigde geheugenplaatsen (voor de ingekomen en uitgaande informatie op momentele en voorgaande bemonsteringstijdstippen en de coëfficiënten van het algoritme). In hoofdstuk XI zal hierop nader worden ingegaan.

10.6 D.D.C. REGELALGORITHMEN

De meeste processen zijn uitgevoerd met P, PI, of PID regelaars, waarin een proportionele, integrerende en differentiërende regelaktie is in te stellen. In toepassingen waarin een rekenmachine deze konventionele regelaars vervangt wordt vaak gebruik gemaakt van regelalgorithmen die een soortgelijke regelaktie uitvoeren. Het regelalgoritme wordt uitgevoerd door een komputersprogramma.

Men onderscheidt in dit verband twee soorten regelalgorithmen.

1. Positiealgoritme (position algorithm, whole value control)
2. Snelheidsalgoritme (velocity algorithm, incremental control).

Bij het positiealgoritme wordt een getal dat een maat is voor de stand van het bedieningsorgaan aangeboden aan de DA omzetter van de betreffende regelkring. Bij het snelheidsalgoritme wordt een getal dat een maat is voor het verschil tussen de nieuwe in te nemen stand en de oude stand van het bedieningsorgaan aangeboden. In dit geval vindt de integratie, die zorgt voor de nieuwe stand van het bedieningsorgaan plaats buiten de rekenmachine b.v. met een stappenmotor. In de meeste gevallen wordt een snelheidsalgoritme toegepast in industriële toepassingen vanwege de volgende voordelen t.o.v. een positiealgoritme.

1. Veiligheid. Wanneer de rekenmachine uitvalt blijft de laatst ingenomen positie van de klep gehandhaafd, terwijl deze onbekend is bij een positie-algorithme.
2. Eenvoudige mogelijkheden om over te schakelen van automatische naar handbediening. Geen plotselinge sprongvormige variaties (bumpless transfer).
3. De sturing van het instelorgaan vindt plaats m.b.v. een stappenmotor; dit kan rechtstreeks geschieden vanuit een digitale uitgang. De stappenmotor zorgt voor de houdwerking.

In de meeste gevallen kan bij de hierna volgende eenvoudige regelingen de berekening per regellus plaats vinden in tientallen tot honderden $\mu\text{sec.}$, zodat bij een bemonsteringsperiode van 1 sec. zeer veel regellussen bediend kunnen worden, zelfs indien de computer ook andere taken heeft zoals in de meeste DDC toepassingen.

Een proportionele aktie kan digitaal vertaald worden als een vermenigvuldiging met een getal.

Een integrerende aktie wordt digitaal een sommerende aktie en een differentiërende aktie wordt digitaal een verschilnemer. De 3 termen voor de P-, I- en D-akties luiden dan als volgt:

1. *proportionele aktie.* Indien $e(nT)$ een getal is dat evenredig is met het foutsignaal dat aan de computer op de bemonsteringstijdstippen wordt aangeboden, geldt voor het getal dat aan de DA omzetter van de betreffende regelkring wordt aangeboden

$$y(nT) = k_p e(nT). \quad (10-19)$$

Dit is het positiealgorithme.

Het snelheidsalgorithme wordt gevonden door ook de uitgang op een voorgaand tijdstip te bepalen.

$$y(nT - T) = k_p e(nT - T).$$

Voor het snelheidsalgorithme geldt:

$$v(nT) = y(nT) - y(nT - T) = k_p \{e(nT) - e(nT - T)\} \quad (10-20)$$

waarin $v(nT)$ het getal is dat aan de uitgang van de rekenmachine wordt aangeboden.

2. *integrerende aktie.* Een getal $e(nT)$ wordt op het tijdstip $t = nT$ toegevoegd aan de som van alle getallen die op voorgaande tijdstippen via de AD omzetter aan de computer zijn toegevoerd. De totale som wordt vermenigvuldigd met een konstante k_i .

Voor de uitgang $y(nT)$ geldt dus:

$$y(nT) = k_i \sum_{k=0}^n e(kT)$$

Bovendien geldt: $y(nT-T) = k_i \sum_{k=0}^{n-1} e(kT)$

Het positiealgorithme luidt:

$$y(nT) = y(nT-T) + k_i e(nT) \quad (10-21)$$

Voor het snelheidsalgorithme wordt gevonden:

$$v(nT) = k_i e(nT). \quad (10-22)$$

3. *differentiërende aktie.* Van een getal $e(nT)$ wordt de voorgaande informatie $e(nT-T)$ afgetrokken, en vindt een vermenigvuldiging plaats met een konstante k_d . Voor de uitgang geldt dus bij een positiealgorithme

$$y(nT) = k_d \{e(nT) - e(nT-T)\} \quad (10-23)$$

Voor het snelheidsalgorithme dient ook $y(nT-T)$ bepaald te worden. Er geldt: $y(nT-T) = k_d \{e(nT-T) - e(nT-2T)\}$ zodat het snelheidsalgorithme luidt:

$$v(nT) = k_d \{e(nT) - 2e(nT-T) + e(nT-2T)\} \quad (10-24)$$

Deze differentievergelijkingen kunnen ook als volgt genoteerd worden:

$$y(nT) = k_d \nabla e(nT) \quad \text{en} \quad v(nT) = k_d \nabla^2 e(nT).$$

De z -transformatie van de proportionele, integrerende en differentiërende akties luiden achtereenvolgens voor het positiealgorithme:

$$k_p, \frac{k_i}{1-z^{-1}} \quad \text{en} \quad k_d(1-z^{-1}) \quad (10-25)$$

en voor het snelheidsalgorithme:

$$k_p(1-z^{-1}), k_i \quad \text{en} \quad k_d(1-2z^{-1}+z^{-2}) \quad (10-26)$$

Hieruit kunnen de algoritmen worden samengesteld voor de meest toegepaste PI en PID regelaars.

4. *PI regelaar*

De overdrachtsfunctie van het positiealgorithme luidt:

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = k_p + \frac{k_i}{1-z^{-1}} = \frac{(k_p+k_i) - k_p z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{(k_p+k_i)z - k_p}{z-1} \quad (10-27)$$

zodat de differentievergelijking van het positiealgorithme luidt:

$$y(nT) = y(nT-T) + (k_p+k_i) e(nT) - k_p e(nT-T) \quad (10-28)$$

De overdrachtsfunctie van het snelheidsalgorithme luidt:

$$\frac{V(z)}{E(z)} = (k_p + k_i) - k_p z^{-1} = \frac{z(k_p + k_i) - k_p}{z} \quad (10-29)$$

De differentievergelijking van het snelheidsalgorithme luidt:

$$v(nT) = (k_p + k_i) e(nT) - k_p e(nT - T) \quad (10-30)$$

5. PID regelaar (parallelvorm)

De overdrachtsfunctie van het positiealgorithme luidt:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{E(z)} &= k_p + \frac{k_i}{1 - z^{-1}} + k_d(1 - z^{-1}) \\ &= \frac{(k_p + k_i + k_d) - (k_p + 2k_d)z^{-1} + k_d z^{-2}}{(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{(k_p + k_i + k_d)z^2 - (k_p + 2k_d)z + k_d}{z(z - 1)} \end{aligned} \quad (10-31)$$

De differentievergelijking van het positiealgorithme luidt:

$$y(nT) = y(nT - T) + (k_p + k_i + k_d) e(nT) - (k_p + 2k_d)e(nT - T) + k_d e(nT - 2T) \quad (10-32)$$

De overdrachtsfunctie van het snelheidsalgorithme luidt:

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{E(z)} &= (k_p + k_i + k_d) - (k_p + 2k_d)z^{-1} + k_d z^{-2} \\ &= \frac{(k_p + k_i + k_d)z^2 - (k_p + 2k_d)z + k_d}{z^2} \end{aligned} \quad (10-33)$$

De differentievergelijking van het snelheidsalgorithme luidt:

$$v(nT) = (k_p + k_i + k_d) e(nT) - (k_p + 2k_d) e(nT - T) + k_d e(nT - 2T) \quad (10-34)$$

6. PID regelaar (serievorm)

Vaak komt de PID regelaar van analoge uitvoering overeen met de serievorm waarvan de overdrachtsfunctie luidt:

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = k \left(1 + \frac{1}{p\tau_i} \right) (1 + p\tau_d)$$

zodat voor het positiealgorithme geldt:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{E(z)} &= k_p \left(1 + \frac{k_i}{1 - z^{-1}} \right) \{ 1 + k_d(1 - z^{-1}) \} \\ &= \frac{k_p \{ (k_i + 1) - z^{-1} \} \{ (k_d + 1) - k_d z^{-1} \}}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (10-35)$$

waarvan de differentievergelijking luidt:

$$y(nT) = y(nT-T) + k_p[(1+k_i)(1+k_d)e(nT) - (2k_d+k_i k_d+1)e(nT-1) + k_d e(nT-2T)] \quad (10-36)$$

Voor het snelheidsalgorithme geldt:

$$v(nT) = k_p[(1+k_i)(1+k_d)e(nT) - (2k_d+k_i k_d+1)e(nT-T) + k_d e(nT-2T)] \quad (10-37)$$

In het algemeen kan men stellen dat de digitale P, PI en PID regelaars beschreven worden door de volgende overdrachtsfunctie:

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1}} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z} \quad (10-38)$$

waarin a_0 , a_1 en a_2 functies van k_p , k_i en k_d zijn en b_1 de waarde -1 of 0 aanneemt afhankelijk van het feit of men een positiealgorithme (p.a) of snelheidsalgorithme (v.a.) wenst (zie tabel X.3)

Tabel X.3

Type regelaar / Coëf.	a_0	a_1	a_2	b_1
P (p.a)	k_p	0	0	0
P (v.a)	k_p	$-k_p$	0	0
PI (p.a)	$k_p + k_i$	$-k_p$	0	-1
PI (v.a)	$k_p + k_i$	$-k_p$	0	0
PID (p.a) (parallelvorm)	$k_p + k_i + k_d$	$-k_p - 2k_d$	k_d	-1
PID(v.a) (parallelvorm)	$k_p + k_i + k_d$	$-k_p - 2k_d$	k_d	0
PID (p.a) (serievorm)	$k_p(1+k_i)(1+k_d)$	$k_p(-2k_d - k_i k_d - 1)$	$k_d k_p$	-1
PID (v.a) (serievorm)	$k_p(1+k_i)(1+k_d)$	$k_p(-2k_d - k_i k_d - 1)$	$k_d k_p$	0

De regelalgorithmen zijn onafhankelijk van de bemonsteringsperiode T . Dit lijkt vreemd omdat de bemonsteringsperiode een sterke invloed op de dynamische eigenschappen van de regelkring heeft.

Expliciet komt T niet tot uiting in de differentievergelijkingen omdat deze vergelijkingen bewerkingen op rijen getallen aangeven. De bewerkingen blijven gelijk of men ze langzaam of snel uitvoert.

Impliciet is er wel degelijk een afhankelijkheid van de bemonsteringsperiode. Dit komt tot uitdrukking indien men de diverse regelakties van een continue regelaar met overdrachtsfunctie:

$H(p) = k + \frac{1}{p\tau_i} + p\tau_d$ vergelijkt met het regelalgoritme van een digitaal equivalente regelaar (fig. 10.19).

Indien de bemonsteringsperiode klein is geldt voor de overdrachtsfunctie van de nulde orde houdschakelaar en $D(z)$ respectievelijk voor de P, I en D aktie:

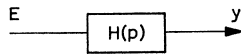
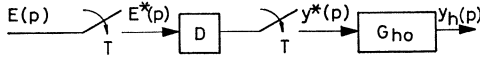


Fig. 10.19

$$\begin{aligned} \text{Discrete P-aktie: } Y_h(p) &= E^*(p) D^*(p) \frac{1-e^{-pT}}{p} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(p+jn\omega_s) \cdot k_p \frac{1-e^{-pT}}{p} \\ &\approx \frac{1}{T} E(p) \cdot k_p \frac{1-1+pT\dots}{p} = k_p E(p) \end{aligned}$$

Kontinue P-aktie $Y(p) \equiv kE(p)$

zodat $k \approx k_p$

$$\begin{aligned} \text{Diskrete I-aktie: } Y_h(p) &= E^*(p) D^*(p) \frac{1-e^{-pT}}{p} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(p+jn\omega_s) \times \\ &\times \frac{k_i}{1-e^{-pT}} \frac{1-e^{-pT}}{p} \approx \frac{1}{T} \frac{k_i}{p} \cdot E(p) \end{aligned}$$

Kontinue I-aktie: $Y(p) = \frac{1}{p\tau_i} E(p)$

$$\text{zodat } \frac{k_i}{T} \approx \frac{1}{\tau_i} \quad \text{of} \quad k_i \approx \frac{T}{\tau_i}$$

Diskrete D-aktie:

$$\begin{aligned} Y_h(p) &= E^*(p) D^*(p) \frac{1-e^{-pT}}{p} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(p+jn\omega_s) k_d \times \\ &\times \frac{(1-e^{-pT})(1-e^{-pT})}{p} \approx \frac{1}{T} E(p) k_d \frac{(1-2e^{-pT} + e^{-2pT})}{p} \end{aligned}$$

$$= \frac{k_d (1 - 2 + 2pT - p^2 T^2 + \dots + 1 - 2pT + 2p^2 T^2 + \dots)}{T p} E(p)$$

$$\approx \frac{k_d}{T} p T^2 E(p) = k_d T p E(p)$$

Kontinue D-actie: $Y(p) = p\tau_d E(p)$

$$\text{zodat } k_d T \approx \tau_d \quad \text{of} \quad k_d \approx \frac{\tau_d}{T}$$

Het is dus duidelijk dat de *coëfficiënten* k_p , k_i en k_d in het regelalgoritme wel degelijk afhangen van de bemonsteringsperiode T indien zij worden vergeleken met de instelwaarden k , τ_i en τ_d van de kontinu werkende regelaars.

De factoren k_p , k_i en k_d zijn dimensieloos.

Indien de analoge en de digitale regelaar gevolgd door een nulde orde houdschakeling, in het frekwentie-domein worden vergeleken voor een kleine waarde van T en voor relatief lage frekwenties geldt bij benadering het volgende.

$$\text{Diskrete P-actie: } Y_h(j\omega) = \frac{k_p}{T} E(j\omega) \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \approx k_p \cdot e^{-1/2 j\omega T} \cdot E(j\omega)$$

waarin de schakelaar gevolgd door de houdschakeling wordt benaderd door $T e^{-1/2 j\omega T}$.

Kontinue P-actie: $Y(j\omega) = k E(j\omega)$

$$\text{Diskrete I-actie: } Y_h(j\omega) = \frac{1}{T} E(j\omega) \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \cdot \frac{k_i}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{1}{T} k_i \frac{1}{j\omega} E(j\omega)$$

Kontinue I-actie: $Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_i} E(j\omega)$

$$\text{Diskrete D-actie: } Y_h(j\omega) = \frac{1}{T} E(j\omega) \frac{(1 - e^{-j\omega T})^2}{j\omega} k_d \approx k_d T j\omega \cdot e^{-j\omega T} E(j\omega)$$

waarin de schakelaar gevolgd door een houdschakeling wordt benaderd door $T e^{-1/2 j\omega T}$.

Kontinue D-actie: $Y(j\omega) = j\omega\tau_d E(j\omega)$.

Ter vergelijking worden de overdrachtsfuncties van de continue regelakties en de diskrete regelakties in het frekwentiedomein gegeven (zie tabel X.4). De proportionele actie van de digitale regelaar geeft echter een extra fase-draaiing. De integrerende actie geeft hetzelfde resultaat, terwijl de differentiërende actie van de digitale regelaar minder fase-voorijling geeft en op den duur zelfs fase-naijling geeft.

Tabel X.4

	kontinu	diskreet
P aktie:	k	$k_p e^{-1/2j\omega T}$
I aktie:	$\frac{1}{\omega\tau_i} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{k_i}{\omega T} e^{-j\frac{\pi}{2}}$
D aktie:	$\tau_d \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$	$k_d T \omega e^{j(\frac{\pi}{2} - \omega T)}$

Tenslotte nog enige opmerkingen over de differentiërende aktie. Voor een snelheidsalgorithme geldt dat de differentiërende aktie wordt gevormd door:

$$k_d \{e(nT) - 2e(nT - T) + e(nT - 2T)\}.$$

Tengevolge van o.a. de kwantiseringsruis van de AD omzetter kan de uitkomst van deze aktie een nogal stochastisch karakter hebben waarbij zelfs het teken van deze aktie onjuist kan worden. Er wordt daarom meestal een andere differentiërende aktie toegepast. Deze benadering is afkomstig uit de numerieke analyse. Er worden meer termen in de bepaling van de differentie meegenomen.

De term $e(nT) - e(nT - T)$ wordt vervangen door:

$$\frac{1}{6} \{e(nT) + 3e(nT - T) - 3e(nT - 2T) - e(nT - 3T)\}$$

en de term $e(nT - T) - e(nT - 2T)$ wordt vervangen door:

$$\frac{1}{6} \{e(nT - T) + 3e(nT - 2T) - 3e(nT - 3T) - e(nT - 4T)\}$$

zodat de totale differentiërende aktie van het snelheidsalgorithme vervangen wordt door:

$$\frac{k_d}{6} \{e(nT) + 2e(nT - T) - 6e(nT - 2T) + 2e(nT - 3T) + e(nT - 4T)\} \quad (10-39)$$

In een d.d.c. geregeld proces wordt het setpoint (ingestelde waarde) eveneens ingesteld op de rekenmachine, zodat ook het vergelijkingsorgaan in de rekenmachine is ingebouwd (zie fig. 10.20).

Meestal heeft het setpoint een vaste waarde zodat geldt:

$$r(nT) = r(nT - T) = r(nT - 2T) = \dots$$

De waarde van het setpoint zal in dit geval dus maar in enkele termen van de algorithmen een rol spelen.

Aangezien $e(nT) = r(nT) - c(nT)$ kan voor het positiealgorithme van het PID-algorithme in parallelvorm geschreven worden:

$$\begin{aligned}
 y(nT) = & y(nT-T) + (k_p + k_i) \{r(nT) - c(nT)\} - k_p \{r(nT-T) \\
 & - c(nT-T)\} + \frac{k_d}{6} \{-c(nT) - 3c(nT-T) \\
 & + 3c(nT-2T) + c(nT-3T)\}
 \end{aligned} \tag{10-40}$$

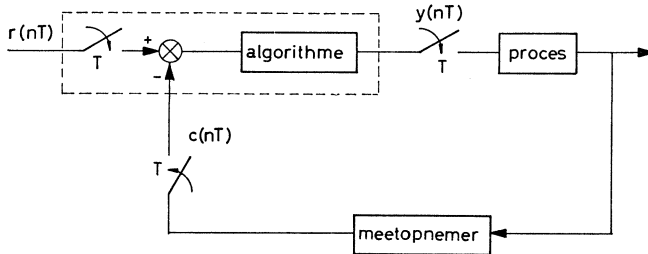


Fig. 10.20

De differentiërende aktie is onafhankelijk van de waarde van het setpoint geworden. Wordt het setpoint veranderd, dan komt deze verandering van r niet in de D -aktie naar voren. De uitkomst is dus in feite niet korrekt maar als regelaktie juist gunstig omdat anders ongewenst grote variaties in $y(nT)$ zouden optreden. De voorgaande formule wordt daarom ook bij wijzigingen in het setpoint gebruikt. Bij het snelheidsalgorithme is het eveneens ongewenst de waarde van $r(nT)$ in de differentiërende aktie mee te nemen. De waarde van $r(nT)$ dient wel meegenomen te worden in de proportionele en integreerende aktie. Het snelheidsalgorithme van de PID-regelaar in parallelvorm krijgt de volgende vorm:

$$\begin{aligned}
 v(nT) = & k_p \{r(nT) - r(nT-T) - c(nT) + c(nT-T)\} + k_i \{r(nT) \\
 & - c(nT)\} + \frac{k_d}{6} \{-c(nT) - 2c(nT-T) + 6c(nT-2T) \\
 & - 2c(nT-3T) - c(nT-4T)\}
 \end{aligned} \tag{10-41}$$

Indien het signaal $c(t)$ weinig varieert of indien de bemonsteringsperiode klein is, zal het verschil tussen de opeenvolgende waarden van $c(nT)$ en dus ook van $e(nT)$ bij vaste waarde van het setpoint erg klein zijn.

De kwantisering door de AD omzetter kan van invloed worden. Bovendien kan door de afrondingsfouten bij de berekening van het algorithme de berekende waarde kleiner worden dan het increment dat aanwezig is in het uitgangssignaal $y(nT)$.

Hierdoor is het mogelijk dat een niet onbelangrijke drift ontstaat vooral bij gebruik van een P of PD aktie in een snelheidsalgorithme.

Het is daarom gewenst in dit geval een integrerende aktie toe te voegen waardoor de term $k_i(r(nT) - c(nT))$ zorg draagt voor een bijdrage die ongelijk aan nul is als $c(nT)$ in toenemende mate van $r(nT)$ gaat afwijken.

Bij een positiealgorithme is het gevaar voor deze vorm van drift niet aanwezig. Indien het foutsignaal $e(nT)$ echter klein gaat worden, dus in de buurt van de stationaire toestand, gaat weer een ander verschijnsel een rol spelen, vooral indien k_i klein gekozen is. Dan wordt de term $k_i\{r(nT) - c(nT)\}$ te klein om nog een bijdrage tot het uitgangssignaal te geven.

Het verschijnsel dat dan gaat ontstaan is als volgt aan te voelen.

Eerst dient een voldoende groot foutsignaal te worden opgebouwd voordat de uitgang zal veranderen, waarna weer gedurende een tijd geen uitgangssignaal wordt afgegeven. Er zal dus sprake zijn van een zekere oscillatie van het signaal dat toegevoerd wordt aan het korrigerende orgaan. Deze oscillatie wordt veroorzaakt door het digitale algoritme.

10.7 KEUZE VAN DE BEMONSTERINGSPERIODE T

De bemonsteringsperiode bepaalt in sterke mate het dynamische karakter van de regelkring. Indien deze echter klein genomen kan worden t.o.v. de responsietijden van de processen, kan het regelsysteem beschouwd worden als een kontinu systeem.

Te kleine waarden van T veroorzaken echter weer het hiervoor beschreven verschijnsel door afrondingsfouten.

Afhankelijk van het aantal regellussen en de uitgebreidheid van het regelalgoritme is de keuze van de bemonsteringsperiode naar kleine waarden begrensd.

Bij de keuze van de bemonsteringsperiode dient in ieder geval het theorema van Shannon in acht genomen te worden maar T kan beter nog lager gekozen worden, omdat in de praktijk nooit een volledige begrenzing in de frekwentieband optreedt. De keuze van T hangt dan af van de belangrijkste tijdconstante(n) en de grootte van de dode tijd.

De volgende opmerkingen gelden voor de keuze van T .

1. In een systeem met *inherente* bemonstering is de keuze van T beperkt door het bemonsteringsproces. Bijvoorbeeld in een kwaliteitsregeling met een gaschromatograaf dient T gekozen te worden in de orde van 5 à 10 minuten. Het gevolg is dat de regelkring sterk wordt beïnvloed door deze waarde van T .
2. Indien men gezien de dynamische eigenschappen van het systeem een vrij grote waarde van T zou kunnen kiezen maar indien de verstoringen die in het proces optreden een frekwentieband hebben die in de buurt van ω_s of hoger ligt, dient men toch een lagere bemonsteringsperiode te kiezen of bijzondere zorg te besteden aan het filterprobleem (zie hoofdstuk XI).

3. Wanneer voor T een te kleine waarde wordt gekozen gaan de kwantiseringsruis en de afrondingsfouten een dominerende rol spelen.

In de procesindustrie wenst men in het algemeen voor een d.d.c. geregelde kring hoogstens een afwijking van 10 tot 20% t.o.v. een continu geregelde kring. Dit heeft geleid tot een aantal vuistregels bij de keuze van T .

1. vuistregels die gerelateerd zijn aan de te regelen grootheid.

debietregeling : 0,1-1 sec.

drukregeling : 1-5 sec.

temperatuurregeling: 10-30 sec.

kwaliteitsregeling : 1-15 min.

2. vuistregels die gerelateerd zijn aan de proceseigenschappen; in het algemeen de belangrijkste tijdconstante en de dode tijd, of aan de frekwentie waarbij de regelkring juist instabiel zou worden.

De meest eenvoudige toepasbare vuistregel is de volgende:

$\frac{T}{\tau} \approx \frac{1}{10}$ waarin τ de belangrijkste tijdconstante van het proces is. Een proces

met een hoofdtijdconstante van τ sec. en een dode tijd van T_D sec. heeft de

volgende overdrachtsfunctie $H(j\omega) = k_1 \frac{e^{-j\omega T_D}}{j\omega\tau + 1}$

Indien geëist wordt dat de signaalverzwakking voor een bepaald frekwentiegebied meer dan 30 t.o.v. de gelijkstroomoverdracht k_1 bedraagt, geldt voor deze frekwenties

$$\frac{1}{30} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{bij} \quad \omega > \frac{30}{\tau}$$

Met in achtname van het theorema van Shannon dient dan als bemonsteringsfrekwentie gekozen te worden:

$$\omega_s > 2 \cdot \frac{30}{\tau} \quad \text{of} \quad \frac{2\pi}{T} > \frac{60}{\tau} \quad \text{of} \quad \frac{T}{\tau} < \frac{1}{10} \quad (10-42)$$

Indien het bemonsterings- en rekonstruktieproces wordt benaderd door een dode tijd van $\frac{1}{2}T$ sec. kan men de overdrachtsfunctie benaderen door:

$$H(j\omega) \approx \frac{e^{-j\omega(T_D + 0.05\tau)}}{j\omega\tau + 1} \quad \text{indien} \quad T = 0,1\tau$$

Het bovenstaande geldt indien $T_D < \tau$. Indien $T_D \gg \tau$ geldt dat men voor het werkgebied mag toelaten de frekwentie $\omega = \frac{3}{4}\pi \frac{1}{T_D}$ of $\omega_s > 1\frac{1}{2}\pi \frac{1}{T_D}$.

Hieruit volgt $T < 1,3 T_D$.

10.8 INSTELREGELS

Bij het gebruik van PID-regelaars worden diverse vuistregels gehanteerd waarvan de regels van Ziegler-Nichols wel de bekendste zijn.

Deze zijn voor continue systemen samengevat in de tabellen X.5 en X.6. De PI en PID regelaars worden beschreven door de overdrachtsfuncties

$$k \left(1 + \frac{1}{p\tau_i} \right) \quad \text{resp.} \quad k \left(1 + \frac{1}{p\tau_i} + p\tau_d \right).$$

Tabel X.5

regelaar	versterking	integratietijd	differentiatietijd
P	$k = 0,5 k_u$		
PI	$k = 0,45 k_u$	$\tau_i = 0,83 T_u$	
PID	$k = 0,6 k_u$	$\tau_i = 0,5 T_u$	$\tau_d = 0,125 T_u$

In deze tabel is k_u de max. toelaatbare versterking waarbij het systeem juist op de grens van stabiliteit verkeert bij een instelling van de regelaar als P-regelaar; T_u is de periodetijd van de dan optredende oscillatie.

Indien het proces benaderd kan worden door de overdrachtsfunctie $H(p) = \frac{k_1 e^{-pT_D}}{p\tau_1 + 1}$ dan kunnen de regels van Ziegler-Nichols ook worden uitgedrukt als functie van k_1 , T_D en τ_1 (zie tabel X.6.) Deze tabel geldt slechts voor $T_D < \tau$.

Tabel X.6

regelaar	versterking	integratietijd	differentiatietijd
P	$k = \frac{\tau_1}{T_D} \frac{1}{k_1}$		
PI	$k = 0,9 \frac{\tau_1}{T_D} \frac{1}{k_1}$	$\tau_i = 3,3 T_D$	
PID	$k = 1,2 \frac{\tau_1}{T_D} \frac{1}{k_1}$	$\tau_i = 2 T_D$	$\tau_d = 0,5 T_D$

De regels die zijn samengevat in tabel X.6 kunnen eenvoudig herschreven worden als regels voor de diskrete regelaars indien men de werking van de

bemonsteraars en de houdschakeling benadert door een dode tijd van $\frac{1}{2}T$ sec. en indien men het digitale regelalgorithme laat overeenkomen met de overeenkomstige continue regelakties. Fig. 10.21 gaat dan over in fig. 10.22.

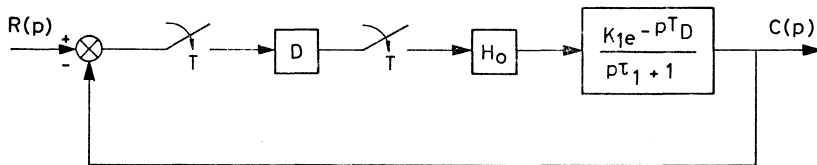


Fig. 10.21

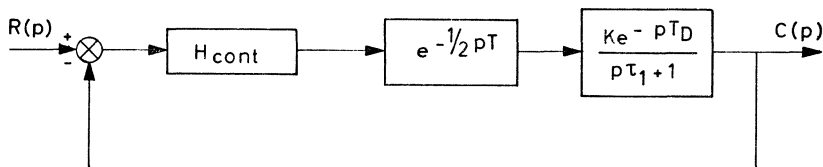


Fig. 10.22

Men kan dan de regels van tabel X.6 gebruiken indien men T_D vervangt door $T_D + \frac{1}{2}T$.

Stelt men $\frac{\tau_1}{T_D} \frac{1}{k_1} = k_0$ dan geldt de tabel X.7.

Tabel X.7

regelaar	versterking	integratietijd	differentiatietijd
P	$k = k_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{T}{T_D}}$		
PI	$k = 0,9 k_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{T}{T_D}}$	$\tau_i = 3,3 T_D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{T}{T_D}\right)$	
PID	$k = 1,2 k_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{T}{T_D}}$	$\tau_i = 2 T_D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{T}{T_D}\right)$	$\tau_d = 0,5 T_D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{T}{T_D}\right)$

De instelregels zijn dus functies van de verhouding $\frac{T}{T_D}$ geworden. Algemeen kan men stellen dat de proportionele versterking verzwakt en de integratie-

tijd en differentiatietijd versterkt moet worden bij DDC geregelde systemen in vergelijking met continu geregelde systemen.

Indien T klein is t.o.v. T_D veranderen de regels slechts zeer weinig, maar indien de verhouding $\frac{T}{T_D}$ toeneemt zullen de regels aanzienlijk veranderen. De vraag is dan of men de benadering die men heeft toegepast nog mag toepassen. In systemen met een verhouding $\frac{\tau_1}{T_D}$ die vrij klein is zal men de benadering wel mogen toepassen.

10.9 KWANTISERINGSEFFEKTEN

Zoals uit het voorgaande blijkt is de kwantisering van invloed op de nauwkeurigheid en de keuze van de bemonsteringsperiode. Kwantisering ontstaat o.a. door:

1. de AD omzetting.
2. afrondingsfouten bij de berekening van het regelalgoritme tengevolge van de eindige woordlengte.
3. afrondingsfouten in de coëfficiënten van de differentievergelijking. De kwantisering kan in principe op twee wijzen gebeuren (zie fig. 10.23 a en fig. 10.23 b.)

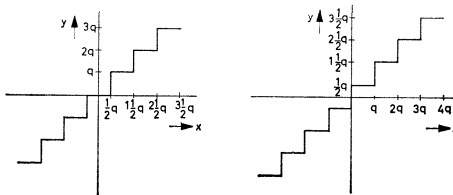


Fig. 10.23

Er geldt respectievelijk:

$$y = nq \text{ indien } (n - \frac{1}{2})q \leq x < (n + \frac{1}{2})q \text{ en}$$

$$y = (n + \frac{1}{2})q \text{ indien } nq \leq x \leq (n + 1)q.$$

Kwantisering volgens fig. 10.23a komt het meest in de praktijk voor. Hierdoor ontstaat een dode band in de regeling.

De methode volgens fig. 10.23b veroorzaakt een limit cycle doordat de uitkomst $y = 0$ niet kan voorkomen.

Omzetting van signalen met grote amplitude gaat gepaard met een kleine relatieve fout. Dit in tegenstelling tot signalen met een kleine amplitude. Het is dus waarschijnlijk dat een niet uniforme methode met fijne kwanti-

sering voor kleine signalen en een grove kwantisering van grote signalen een verbetering zal geven in de stationaire toestand.

Deze niet uniforme kwantisering kan worden verkregen door een uniforme kwantiseerder vooraf te laten gaan door een signaalkompressor en te laten volgen door een signaalexpander (zie fig. 10.24).

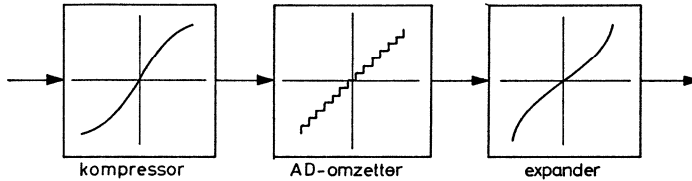


Fig. 10.24

Verder kan men besparen op het aantal bits door gebruik te maken van deze methode.

10.10 SYSTEMEN MET VERSCHILLENDE BEMONSTERINGSFREKWENTIES EN ASYNCHRONE BEMONSTERING

In sommige gevallen worden doelbewust systemen gebruikt waarvan de schakelaars niet dezelfde periode hebben, zoals in fig. 10.25 aangegeven.

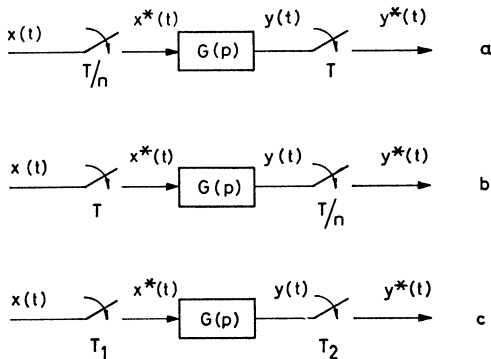


Fig. 10.25

De reden om meervoudige bemonsteringen toe te passen, kan liggen in een praktische omstandigheid en wel, dat er delen in het systeem zijn, waar slechts informatie beschikbaar is na relatief lange tijden en andere delen, die veel sneller informatie ter beschikking hebben. Bovendien geeft dit de mogelijkheid bepaalde signalen eerst te filteren (smoothing).

Deze meervoudige bemonstering kan soms met de meervoudige bemonsteringsmethode worden berekend, b.v. het systeem volgens fig. 10.25a.

In het geval van het systeem volgens fig. 10.25b gaat men als volgt te werk.

Stel $n = 3$. De reeks pulsen $y^*(t)$ is op te vatten als een som van n (hier $n = 3$), reeksen pulsen, waarvan de schakeltijden gelijk aan T zijn (aangegeven in fig. 10.26).

De eerste reeks pulsen $y_0^*(t)$ is uit te rekenen met de gewone z -transformatie. De tweede reeks pulsen $y_1^*(t)$ kan worden verkregen door het signaal $y(t)$ op de bemonsteringstijdstippen $\frac{1}{3}T, \frac{4}{3}T, \frac{7}{3}T$, te nemen of i.h.a. $\frac{1}{n}T, \left(1 + \frac{1}{n}\right)T, \left(2 + \frac{1}{n}\right)T, \dots$ In plaats van de bemonsteringstijdstippen met $\frac{1}{n}T$ ten opzichte van de oorspronkelijke bemonsteringstijdstippen te vertragen, is het mogelijk om de bemonsteringstijdstippen gelijk te laten en het oorspronkelijke signaal (denkbeeldig) te vervroegen.

Voor de berekening is het nl. eenvoudiger om de bemonsteringstijdstippen gelijk te laten; dan is de gewone z -transformatie te gebruiken. Het signaal $y_1(t)$ moet dus vervroegd worden. Na de schakelaar moet weer een zodanige

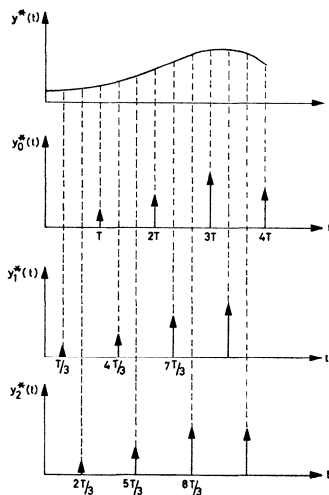


Fig. 10.26

vertragingstijd worden geïntroduceerd dat deze de oorspronkelijke vertraging weer opheft. Voor het signaal $y_2^*(t)$ geldt op analoge wijze dat de schakeltijden weer gelijk kunnen worden gehouden mits een vervroeging van $y(t)$ met $\frac{2}{3}T$ wordt ingevoerd. In het algemeen ontstaan door de schakelaar met schakeltijd $\frac{T}{n}$ totaal n reeksen pulsen:

$$y_0^*(t), y_1^*(t), \dots, y_k^*(t), \dots, y_{(n-1)}^*(t)$$

Voor $y_k^*(t)$ wordt eerst een vervroeging $\frac{k}{n} T$ ingevoerd en vervolgens een even grote vertragingstijd.

De schakelaar met schakeltijden T/n wordt dus vervangen door n parallelschakelaars, die bemonsteren op de tijdstippen $t = 0, T, 2T, \dots$ enz. en $(n-1)$ voorrijlings- en $(n-1)$ vertragingnetwerken. Voor $n = 3$ is dit aangegeven in fig. 10.27.

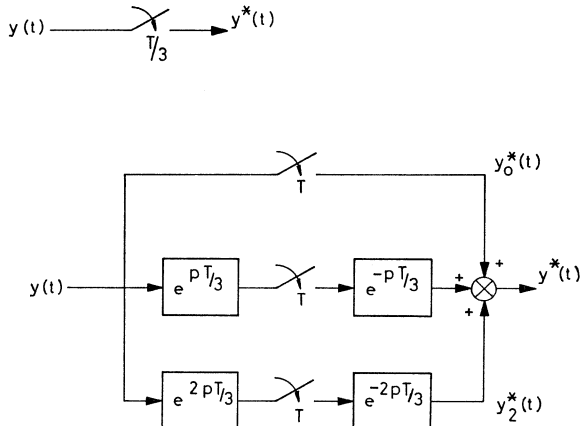


Fig. 10.27

Het systeem van fig. 10.26 wordt op deze manier vervangen door het systeem van fig. 10.28

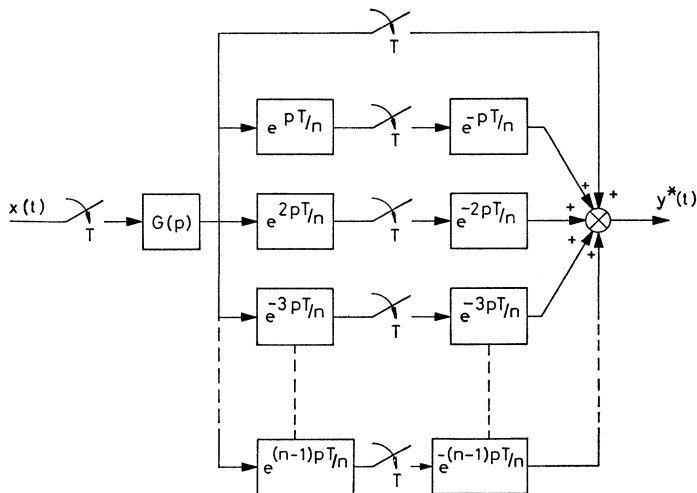


Fig. 10.28

$$\begin{aligned}
\text{zodat } Y(z) &= X(z)G(z) + X(z)z^{-1/n}G\left(z, 1 - \frac{1}{n}\right) + \\
&+ X(z)z^{-2/n}G\left(z, 1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
&= X(z)G(z) + \sum_{k=1}^n z^{-k/n}G\left(z, 1 - \frac{k}{n}\right) \quad (10-43)
\end{aligned}$$

In het geval dat het systeem schakelaars heeft men 2 bemonsteringstijden T_1 en T_2 kan men als volgt te werk gaan.

Indien de verhouding van T_1 en T_2 een eenvoudige breuk is, is op de boven beschreven wijze een berekening van het systeem mogelijk.

Stel dat er een moment is, dat beide schakelaars S_1 en S_2 gelijktijdig sluiten, en dat $T_1 = \frac{T}{N_1}$ en $T_2 = \frac{T}{N_2}$ (zie fig. 10.25c). Voor de berekening wordt het volgende vervangingsschema verkregen (zie fig. 10.29),

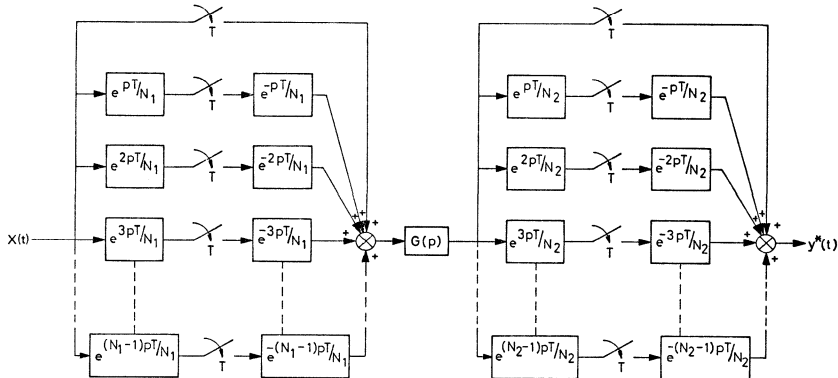


Fig. 10.29

Uit dit schema volgt:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= X(z)G(z) + X(z)Z\{G(p)e^{p\frac{T}{N_2}}\}z^{-\frac{1}{N_2}} + X(z)Z\{G(p)e^{\frac{2pT}{N_2}}\}z^{-\frac{2}{N_2}} \\
&+ \dots + X(z)Z\{G(p)e^{p\frac{T(N_2-1)}{N_2}}\}z^{-\frac{N_2-1}{N_2}} + \\
&+ Z\{X(p)e^{\frac{pT}{N_1}}\}Z\{G(p)e^{-\frac{pT}{N_1}}\} + \\
&+ Z\{X(p)e^{\frac{pT}{N_1}}\}Z\{G(p)e^{-p\frac{T}{N_1}}e^{p\frac{T}{N_2}}\}z^{-\frac{1}{N_2}} + \\
&+ \dots Z\{X(p)e^{\frac{pT}{N_1}}\}Z\{G(p)e^{-p\frac{T}{N_1}}e^{p\frac{(N_2-1)T}{N_2}}\}z^{-\frac{N_2-1}{N_2}} + \dots +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Z \{ X(p) e^{p \frac{(N_1-1)T}{N_1}} \} Z \{ G(p) e^{-p \frac{(N_1-1)T}{N_1}} \} + \\
& + Z \{ X(p) e^{p \frac{(N_1-1)T}{N_1}} \} Z \{ G(p) e^{-p \frac{(N_1-1)T}{N_1}} e^{p \frac{T}{N_2}} \} z^{-\frac{1}{N_2}} + \\
& + \dots + Z \{ X(p) e^{p \frac{(N_1-1)T}{N_1}} \} Z \{ G(p) e^{-p \frac{(N_1-1)T}{N_1}} e^{p \frac{(N_2-1)T}{N_2}} \} z^{-\frac{N_2-1}{N_2}}
\end{aligned}$$

of

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{N_2-1} z^{-\frac{n}{N_2}} \sum_{k=0}^{N_1-1} Z \{ e^{-\frac{kpT}{N_1}} G(p) e^{\frac{npT}{N_2}} \} Z \{ X(p) e^{\frac{pkT}{N_1}} \} \quad (10-44)$$

XI. Digitale filters en compensatienetwerken

11.1 INLEIDING

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de realisatie van digitale filters en compensatienetwerken. De toepassing en de keuze van compensatienetwerken werd besproken in het vorige hoofdstuk. Tevens wordt aandacht besteed aan de toepassing en de keuze van digitale filters.

In regelsystemen kan men filters toepassen indien men regesignalen wil scheiden van stoorsignalen, voordat op de regesignalen bewerkingen worden uitgevoerd m.b.v. compensatienetwerken. De filters zijn dan meestal van eenvoudige aard omdat anders het gevaar van een te grote fasedraaiing ontstaat in teruggekoppelde systemen. Indien sprake is van een sturing of indien signalen bewerkt dienen te worden voordat zij aan regelsystemen worden toegevoerd kan men van ingewikkelde filters gebruik maken waarbij fasedraaiing geen rol speelt. Ook in telecommunicatie systemen en bij de verwerking van meetgegevens wordt meer en meer gebruik gemaakt van digitale filters.

Bij de realisatie van digitale filters en compensatienetwerken zijn een aantal punten van belang:

- het aantal geheugenplaatsen
- het aantal, de aard en de snelheid van de rekenbewerkingen
- de nauwkeurigheid waarmee de berekening plaats vindt.

Afhankelijk van het toepassingsgebied zal een groter belang moeten worden gehecht aan een van deze punten.

Minimalisering van het aantal geheugenplaatsen is momenteel van minder belang vanwege geringere kosten van geheugens, maar kan wel degelijk een rol spelen als simultaan een groot aantal filterbewerkingen door de rekenmachine moet worden verricht.

De snelheid van berekening kan een rol spelen bij regelsystemen, maar is vooral van belang in telecommunicatiesystemen waarbij het te beschouwen frekwentiegebied dit vereist. In dit hoofdstuk zullen diverse realisatie mogelijkheden ter sprake komen. In het algemeen zullen voor regelsystemen de verschillen in nauwkeurigheid die met de diverse realisaties bereikt kunnen worden i.v.m. afbreek- en afrondingsfouten, van weinig belang zijn daar het gaat om filters en compensatienetwerken van lage orde. Dit ligt geheel anders

voor filters van hoge orde zoals in telecommunicatiesystemen gebruikt worden.

11.2 REALISATIESCHEMA'S

Een digitaal filter of compensatienetwerk wordt beschreven door een differentievergelijking die het verband tussen de ingangsrj $\{x(nT)\}$ en de uitgangsrj $\{y(nT)\}$ aangeeft. Voor de realisatie hiervan zijn rekenbewerkingen, schuifbewerkingen en geheugenplaatsen nodig. De bewerkingen kunnen eenvoudig in een digitale rekenmachine plaatsvinden; bovendien zijn hierin geheugenplaatsen beschikbaar. Voor een eenvoudig voorbeeld van een eerste orde differentievergelijking zal dit worden nagegaan.

$$\text{Gegeven: } y(nT) = -b_1 y(nT - T) + a_0 x(nT) \quad (11-1)$$

Deze vergelijking kan beschreven worden door het volgende schema.

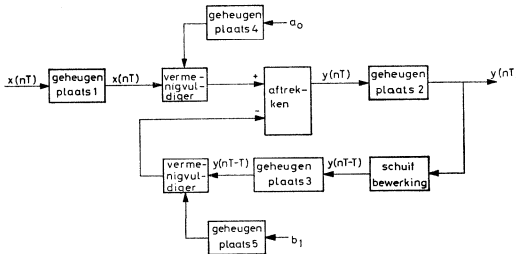


Fig. 11.1

Uit dit schema blijkt dat er geheugenplaatsen nodig zijn voor de informatie $x(nT)$, $y(nT)$ en $y(nT - T)$ en voor de coëfficiënten a_0 en b_1 .

Bovendien moeten een tweetal vermenigvuldigingen en een aftrekking plaatsvinden. Een schuifbewerking zorgt ervoor dat in geheugenplaats 3 de informatie van geheugenplaats 2 wordt overgenomen. Deze bewerking dient plaats te vinden voordat een nieuwe waarde $y(nT)$ wordt berekend.

Voor het dynamische gedrag is alleen de geheugenplaats 3 van belang waarin oude informatie wordt opgeslagen.

Het schema wordt dan: (zie fig. 11.2)

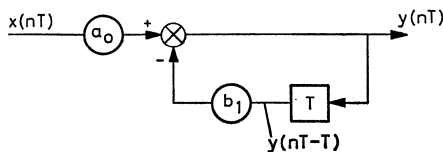


Fig. 11.2

Het blok met T stelt een vertraging voor van de informatie over een tijd T . De z -transformatie van (11.1) luidt:

$$Y(z) = -b_1 z^{-1} Y(z) + a_0 X(z) \quad \text{of} \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}} \quad (11-2)$$

Figuur 11.3 geeft het blokschema van het systeem weer.

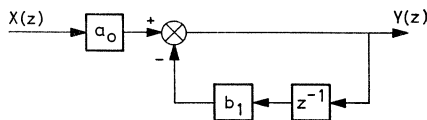


Fig. 11.3

Afhankelijk van de toepassing kan het aantal geheugenplaatsen een beperking vormen. Anderszijds kan ook het aantal rekenbewerkingen een beperking vormen (rekeningtijd). Er zijn diverse configuraties mogelijk voor systemen van hogere orde; deze staan bekend als

1. directe programmering
2. serie programmering
3. parallel programmering
4. kanonieke programmering I
5. kanonieke programmering II

1. *Direkte programmering*

Er wordt uitgegaan van de volgende algemene differentievergelijking

$$y(NT) = \sum_{k=0}^n a_k x(NT-kT) - \sum_{k=1}^m b_k y(NT-kT) \quad (11-3)$$

$y(NT)$ ontstaat uit de sommatie van huidige informatie $x(NT)$ en de informatie van x en y op voorgaande tijdstippen.

Het schema is weergegeven in fig. 11.4.

Het is mogelijk de berekeningen te splitsen in primaire en sekundaire berekeningen.

De sekundaire berekeningen vinden plaats op informatie die op het tijdstip $(N-1)T$ reeds voorhanden is. De uitkomst van deze berekeningen dient op het tijdstip NT bekend te zijn en dan opgeteld te worden bij de uitkomst van de primaire berekening.

De primaire berekening wordt direct na het tijdstip NT uitgevoerd op de informatie $x(NT)$ en bestaat uit een vermenigvuldiging van $x(NT)$ met a_0 en een optelling met de uitkomst van de sekundaire berekening.

Door de splitsing in primaire en sekundaire berekeningen wordt bereikt dat onafhankelijk van de orde van de differentievergelijking de uitkomst

$y(NT)$ na één optelling en één vermenigvuldiging beschikbaar is. De primaire berekeningen hebben hoge prioriteit, terwijl de sekundaire berekeningen slechts klaar dienen te zijn vóór het volgende bemonsteringstijdstip. Deze

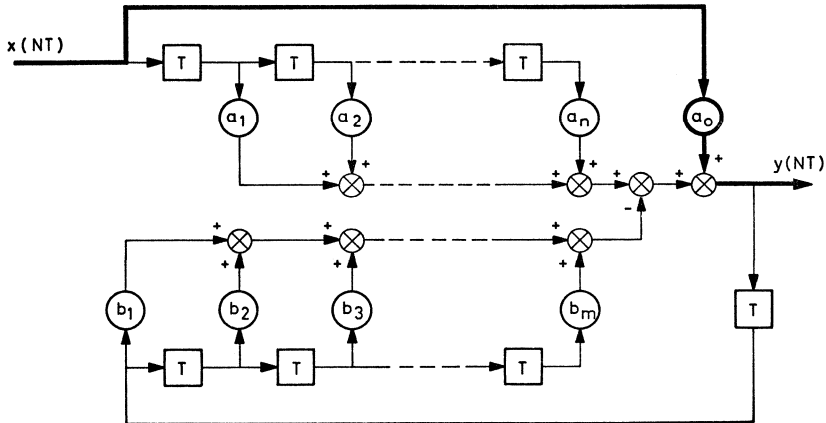


Fig. 11.4

berekeningen kunnen dus op een willekeurig tijdstip tussen de bemonsteringstijdstippen plaatsvinden en bovendien door prioriteitsinterrupties onderbroken worden (zie fig. 11.5).

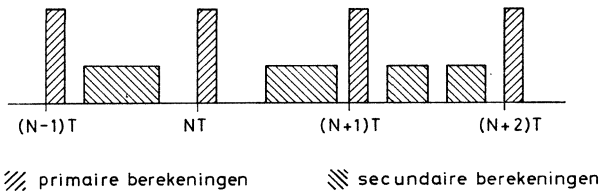


Fig. 11.5

In de fig. 11.4, 11.6, 11.7, 11.8, en 11.10 zijn de primaire berekeningen met een dikke lijn aangegeven.

2. Serie programmering

Indien de noemer van de overdrachtsfunctie $D(z)$ te ontbinden is in factoren kan geschreven worden:

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} = \frac{a_0}{b_0} D_1(z) \cdot D_2(z) \dots D_m(z) \quad (11-4)$$

met

$$D_i(z) = \frac{c_i z^{-1} + 1}{d_i z^{-1} + 1} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n \quad (11-5)$$

en

$$D_i(z) = \frac{1}{d_i z^{-1} + 1} \quad \text{voor } i = n+1, \dots, m \quad (11-6)$$

Het schema is weergegeven in fig. 11.6.

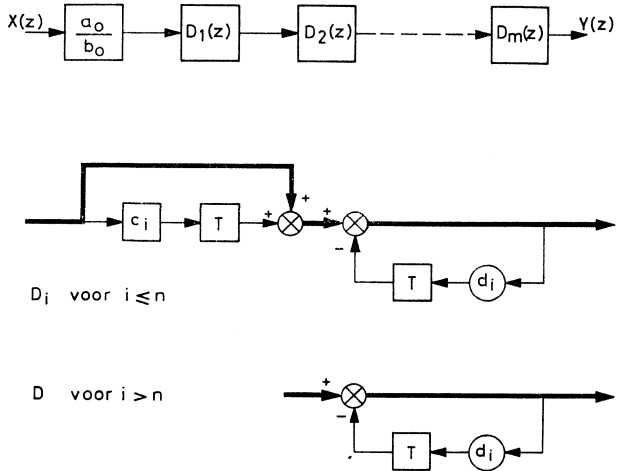


Fig. 11.6

3. Parallel programmering

Indien de noemer van $D(z)$ te ontbinden is in factoren kan geschreven worden:

$$D(z) = D_1(z) + D_2(z) + \dots + D_m(z) \quad (11-7)$$

met

$$D_i(z) = \frac{A_i}{d_i z^{-1} + 1} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, m \quad (11-8)$$

Het schema is weergegeven in fig. 11.7.

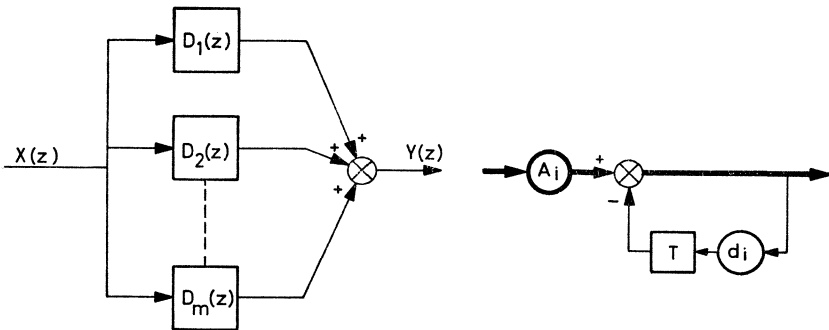


Fig. 11.7

4. Kanonieke programmering I

Hiervoor wordt de differentievergelijking als volgt geschreven:

$$\begin{aligned}
 y(NT) &= \frac{a_0}{b_0} x(NT) + \frac{a_1}{b_0} x(NT-T) - \frac{b_1}{b_0} y(NT-T) + \frac{a_2}{b_0} x(NT-2T) \\
 &\quad - \frac{b_2}{b_0} x(NT-2T) + \dots \\
 &= \frac{a_0}{b_0} x(NT) + \left\{ \frac{a_1}{b_0} x(NT-T) - \frac{b_1}{b_0} y(NT-T) \right\} + \\
 &\quad + \left\{ \frac{a_2}{b_0} x(NT-2T) - \frac{b_2}{b_0} y(NT-2T) \right\} + \dots \quad (11-9)
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking kan als volgt schematisch worden weergegeven: (fig. 11.8)

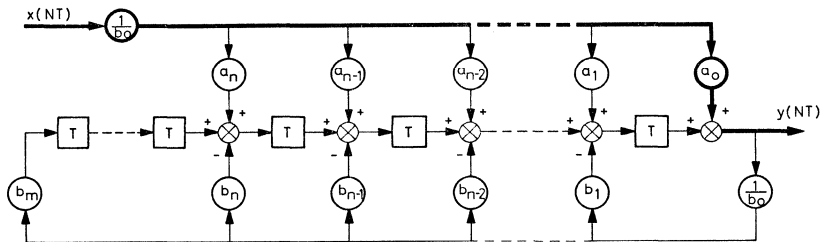


Fig. 11.8

5. Kanonieke programmering II

Hiervoor wordt $D(z)$ als volgt geschreven:

$$D(z) = \frac{\frac{1}{b_0} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})}{1 + \frac{1}{b_0} (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m})} = \frac{D_1(z)}{1 + D_2(z)} \quad (11-10)$$

Deze overdrachtsfunctie kan als volgt schematisch worden weergegeven:

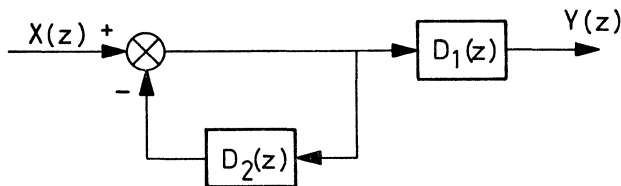


Fig. 11.9

Door de geheugenelementen van $D_1(z)$ en $D_2(z)$ te combineren ontstaat het volgende schema (zie fig. 11.10):

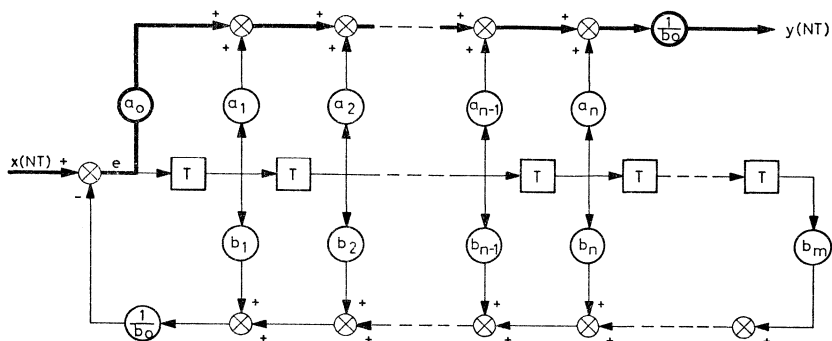


Fig. 11.10

Er geldt:

$$E(z) = X(z) - \frac{1}{b_0} (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) E(z) \quad (11-11)$$

Hieruit volgt:

$$E(z) \left\{ \left(1 + \frac{1}{b_0} (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) \right) \right\} = X(z) \quad (11-12)$$

Tevens geldt:

$$Y(z) = \frac{1}{b_0} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) E(z) \quad (11-13)$$

De parallel programmering en de kanonieke programmeringswijzen vereisen het minste aantal geheugenplaatsen.

Een belangrijk punt die de toepassing van digitale netwerken volgens één van de 5 hiervoor gegeven configuraties beïnvloedt is de nauwkeurigheid van de berekening.

Tengevolge van de berekeningen worden afrondingsfouten en afbrekfouten gemaakt. Deze fouten beïnvloeden het uiteindelijke resultaat, vooral indien het een hoger orde filter of netwerk betreft.

Voor eerste en tweede orde filters voldoen alle configuraties. Voor hogere orde filters dient het gebruik van directe programmering en kanonieke programmering te worden afgeraden vooral indien het gaat om nauwkeurige filters zoals deze o.a. in de kommunikatietechniek worden gebruikt.

Serie of parallel programmering verdient in deze gevallen de voorkeur [11.1].

Voorbeeld 11.1

Bepaal de schema's van de diverse programmeringsmethoden voor

$$D(z) = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})}$$

a. direkte programmering

$$D(z) = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}} \quad \text{met } a_0 = 1, \quad a_1 = 0,2, \quad b_0 = 1$$

$$b_1 = -1,2 \quad \text{en} \quad b_2 = 0,2$$

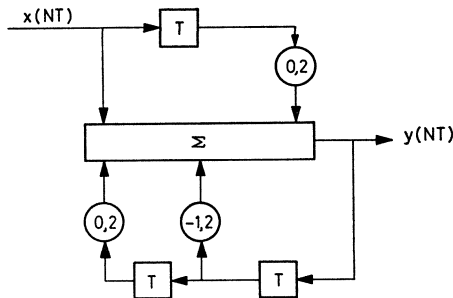


Fig. 11.11

b. serieprogrammering

$$D(z) = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 0,2z^{-1}}$$

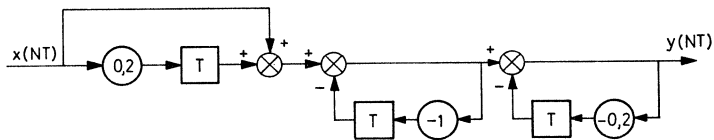


Fig. 11.12

c. parallelprogrammering

$$D(z) = \frac{1,5}{1 - z^{-1}} - \frac{0,5}{1 - 0,2z^{-1}}$$

d. kanonieke programmering I

$$D(z) = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}}$$

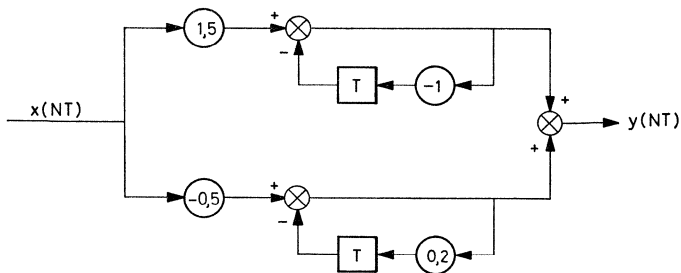


Fig. 11.13

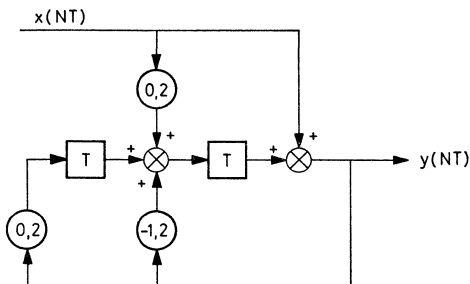


Fig. 11.14

e. kanonieke programmering II

$$D(z) = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}}$$

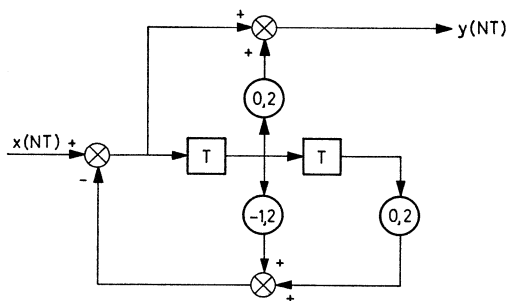


Fig. 11.15

11.3 UITFILTEREN VAN STORINGEN

In continue systemen wordt hoogfrequent ruis in de signalen in de meeste gevallen op voldoende wijze uitgefilterd door het laagdoorlaatkarakter van de regelaar en het proces. Door signaalbemonstering worden echter hoogfrequentie banden geïntroduceerd. Deze worden door het toepassen van houdschakelingen in het algemeen voldoende weggefilterd. Dit is

echter niet het geval indien reeds in het te bemonsteren signaal hoogfrequentere signalen aanwezig zijn. Door het bemonsteren ontstaan ook laagfrequentere signalen, afkomstig van deze hoogfrequentere ruis. Het eenvoudigste is dit in te zien indien de ruis in de buurt van de bemonsteringsfrequentie ligt. In fig. 11.16 is het laagfrequentere regelsignaal tesamen met de hoogfrequentere ruis aangegeven.

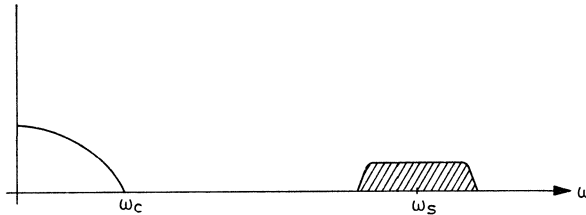


Fig. 11.16

Na bemonsteren ontstaat het signaal dat in fig. 11.17 is aangegeven. Het is niet mogelijk daarna de nu laagfrequentere ruis te scheiden van het oorspronkelijke regelsignaal.

De hoogfrequentere ruis dient dus ofwel vóór de signaalbemonstering uitgefilterd te worden, ofwel de bemonsteringsfrequentie dient verhoogd te worden (zie fig. 11.18).

Deze overwegingen spelen een rol bij de keuze tussen een analoog en een digitaal filter voor het uitfilteren van ruis.

Indien de bemonsteringsfrequentie niet kan worden opgevoerd kan reeds een goede filterwerking verkregen worden met een analoog laagdoorlaatfilter van de vorm:

$$G_f(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_f} \quad (11-14)$$

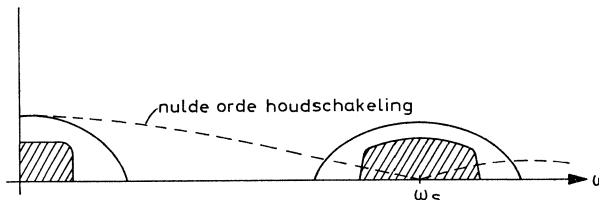


Fig. 11.17

Indien de bemonsteringsfrequentie zodanig is gekozen dat $\omega_s = 10\omega_c$ waarbij ω_c de „praktisch” hoogst voorkomende frequentie in het oorspronkelijke regelsignaal is, hoe groot moet dan τ_f gekozen worden opdat frequenties in de buurt van ω_s een faktor 10 verzwakt worden?

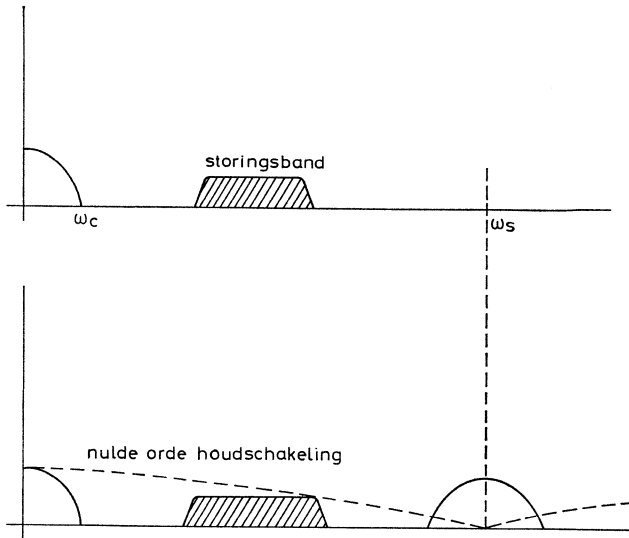


Fig. 11.18

Er moet dan gelden:

$$|G_f(j\omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_s^2 \tau_f^2}} = \frac{1}{10} = -20 \text{ dB}$$

Hieruit volgt $\omega_s \tau_f \approx 10$ of $\tau_f = \frac{10}{\omega_s} = 1,6 T$

De verzwakking die dit filter geeft voor frequenties van het oorspronkelijke signaal bedraagt dan voor $\omega = \omega_c$:

$$G_f(j\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 \tau_f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{100 \omega_c^2}{100 \omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

De werking van dit filter is weergegeven in fig. 11.19.

Indien zowel de ruis als het oorspronkelijk signaal in de frequentieband 0 tot $\frac{\omega_s}{2}$ liggen is het vaak wel mogelijk een digitaal filter te gebruiken. Een

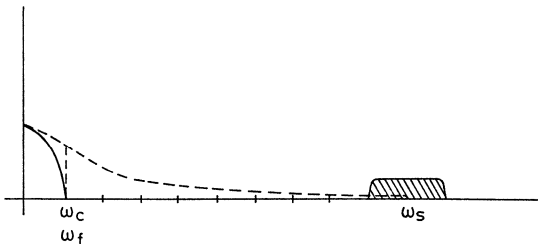


Fig. 11.19

eenvoudig digitaal filter is het zogenaamde „exponential smoothing” filter. (fig. 11.20).

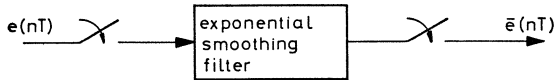


Fig. 11.20

Indien $\bar{e}(nT)$ de uitgang van het filter is en $e(nT)$ de ingang waarop ruis aanwezig is wordt het *exponential smoothing filter* beschreven door:

$$\bar{e}(nT) = \alpha e(nT) + (1 - \alpha) \bar{e}(nT - T) \quad (11-15)$$

waarin α een konstante is die tussen 0 en 1 ligt.

Indien er weinig ruis in het signaal aanwezig is wordt α dichtbij één gekozen.

Indien er zeer veel ruis in het systeem aanwezig is wordt α klein gekozen.

Er geldt eveneens:

$$\bar{e}(nT - T) = \alpha e(nT - T) + (1 - \alpha) \bar{e}(nT - 2T)$$

$$\bar{e}(nT - 2T) = \alpha e(nT - 2T) + (1 - \alpha) \bar{e}(nT - 3T)$$

enzovoort.

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \bar{e}(nT) &= \alpha e(nT) + (1 - \alpha) \{ \alpha e(nT - T) + (1 - \alpha) \bar{e}(nT - 2T) \} \\ &= \alpha e(nT) + \alpha(1 - \alpha) e(nT - T) + \alpha(1 - \alpha)^2 e(nT - 2T) + \dots \end{aligned}$$

Dus:

$$\bar{e}(nT) = \alpha \sum_{k=0}^n (1 - \alpha)^k e(nT - kT) \quad (11-16)$$

De ingangssignalen op de voorgaande bemonsteringstijdstippen worden dus gewogen met een faktor die afneemt naarmate de informatie ouder is.

Indien $\alpha = 0,5$ wordt gekozen geldt:

$$\bar{e}(nT) = 0,5 e(nT) + 0,25 e(nT - T) + 0,125 e(nT - 2T) + \dots$$

De z -transformatie van een exponential smoothing filter luidt:

$$\frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha) z^{-1}} = \frac{\alpha z}{z - (1 - \alpha)} \quad (11-17)$$

Deze overdrachtsfunctie is equivalent met de overdrachtsfunctie van een bemonsterd eerste orde continu filter van de vorm

$$G_f(p) = \frac{k}{p\tau_f + 1}$$

want

$$Z\{G_f(p)\} = \frac{k}{\tau_f} Z\left(\frac{1}{p + \frac{1}{\tau_f}}\right) = \frac{k}{\tau_f} \frac{z}{z - e^{-T/\tau_f}}$$

zodat

$$1 - \alpha = e^{-T/\tau_f} \quad \text{of} \quad \tau_f = \frac{T}{\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}$$

Indien $\alpha = 0,5$ volgt:

$$\tau_f = \frac{T}{\ln 2} \quad \text{of} \quad \frac{1}{\tau_f} = \frac{\omega_s}{8,8} \quad (\text{zie tabel XI-1 voor diverse waarden van } \alpha)$$

In figuur 11.21 zijn de moduluskarakteristieken van $G_f(j\omega)$ gestippeld weergegeven.

Na toepassing van de w -transformatie in het exponential smoothing filter volgt:

$$\frac{\bar{E}(w)}{E(w)} = \frac{\alpha(1+w)}{(1+w) - (1-\alpha)(1-w)} = \frac{\alpha(1+w)}{\alpha + w(2-\alpha)} = \frac{1+w}{1 + \frac{2-\alpha}{\alpha}w}$$

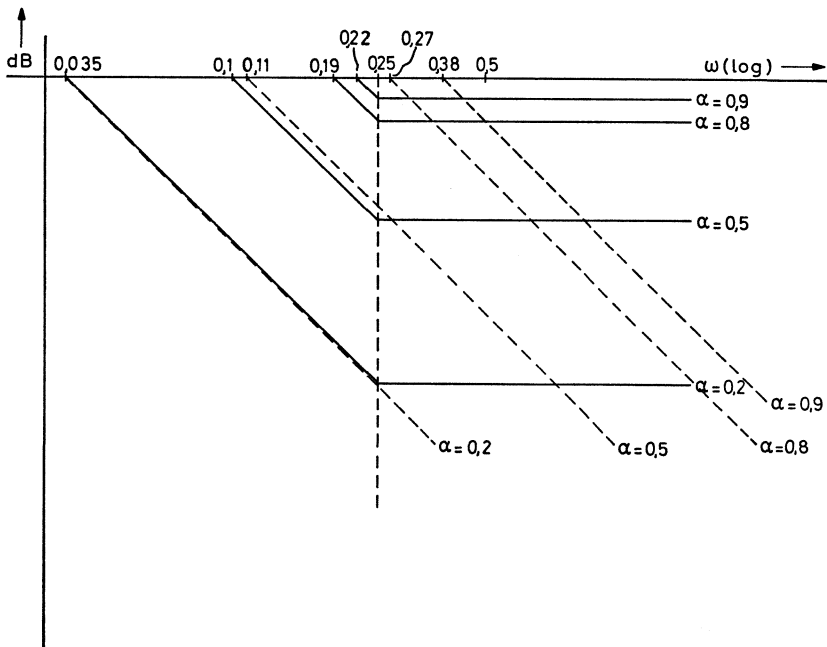


Fig. 11.21

Tabel XI.1

α	$\frac{1}{\tau_f}$
0,9	$0,38 \omega_s$
0,8	$0,27 \omega_s$
0,5	$0,11 \omega_s$
0,2	$0,03 \omega_s$

De bodediagrammen voor diverse waarden van α zijn eveneens getekend in fig. 11.21 (getrokken lijnen).

Een andere filtermogelijkheid is het zogenaamde „*moving average*” filter. In dit geval wordt als schatting genomen de gemiddelde waarde van de laatste N ingangswaarden, dus:

$$\begin{aligned}
 \bar{e}(0) &= e(0) \\
 \bar{e}(T) &= \frac{1}{2}(e(0) + e(T)) \\
 \bar{e}(2T) &= \frac{1}{3}(e(0) + e(T) + e(2T)) \\
 &\vdots \\
 \bar{e}(NT - T) &= \frac{1}{N}(e(0) + e(T) + \dots + e(NT - T)) \\
 \\
 \bar{e}(NT) &= \frac{1}{N}(e(T) + e(2T) + \dots + e(NT)) \\
 &\vdots \\
 \bar{e}(NT + kT) &= \frac{1}{N}(e(kT + T) + \dots + e(NT + kT))
 \end{aligned} \tag{11-18}$$

Na een overgangstoestand (de eerste $N - 1$ geschatte waarden) wordt een filterwerking verkregen die de laatste N waarden meeneemt.

Indien wordt aangenomen dat het overgangsverschijnsel is uitgedempt geldt voor de overdrachtsfunctie van dit netwerk:

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{E}(z)}{E(z)} &= \frac{1}{N}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1}) \\
 &= \frac{1}{N} \frac{(1 - z^{-N})}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{N} \frac{(z^N - 1)z}{z^N(z - 1)}
 \end{aligned} \tag{11-19}$$

Voor grote waarden van N nadert de overdrachtsfunctie tot een schatter van de gemiddelde waarde.

Voor $N = 2, 3$ en 4 ontstaan de volgende polen- en nulpuntenbeelden, (fig. 11.22).

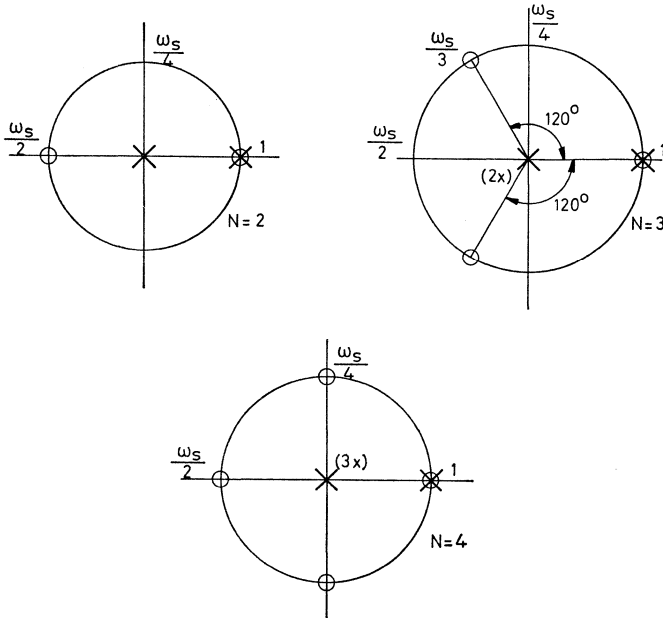


Fig. 11.22

$$N = 2: \frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z(z-1)} = \frac{1}{2} \frac{(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = \frac{1}{2} \frac{z+1}{z} \quad (11-20)$$

$$N = 3: \frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = \frac{1}{3} \frac{z^3 - 1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{3} \frac{(z-1)(z^2 + z + 1)}{z^2(z-1)} \\ = \frac{1}{3} \frac{(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3})(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{3})}{z^2} \quad (11-21)$$

$$N = 4: \frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = \frac{1}{4} \frac{z^4 - 1}{z^3(z-1)} = \frac{1}{4} \frac{(z-1)(z+1)(z+j)(z-j)}{z^3(z-1)} \\ = \frac{(z+1)(z+j)(z-j)}{4z^3} \quad (11-22)$$

Er ontstaan dus N nulpunten die regelmatig verdeeld zijn over de eenheids-cirkel en waarvan het nulpunt in $z=1$ wordt opgeheven door een pool, terwijl er N polen ontstaan waarvan er $N-1$ in de oorsprong liggen en één in $z=1$.

Indien $N=3$ wordt de frekwentie $\omega = \frac{\omega_s}{3}$ volledig uitgefilterd en er ontstaat tevens een sterke demping van frekwenties die hier dicht bij liggen. Indien $N=4$ wordt de frekwentie $\omega = \frac{\omega_s}{4}$ volledig uitgefilterd, enzovoort.

In fig. 11.23 is voor enkele waarden van N de frekwentiekarakteristiek weergegeven. Een goede filterwerking wordt ook verkregen door de combinatie van een exponential smoothing filter en een moving average filter. In

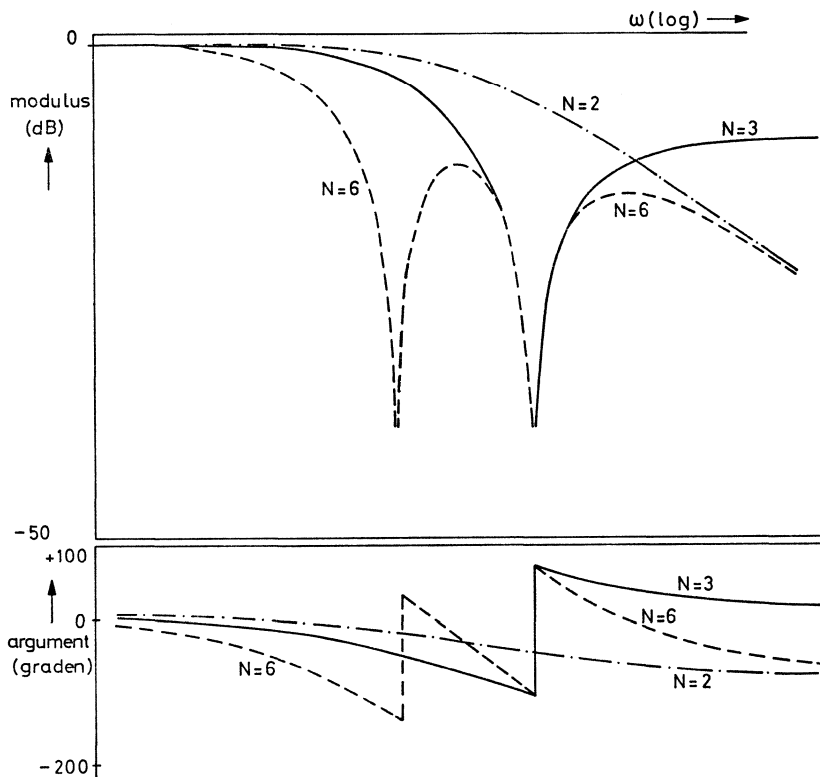


Fig. 11.23

het eenvoudigste geval ($N=2$) wordt een filter verkregen met de overdrachtsfunctie:

$$\frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = \frac{\alpha z}{z - (1 - \alpha)} \cdot \frac{1}{2} \frac{z + 1}{z} = \frac{1/2 \alpha (z + 1)}{z - (1 - \alpha)}. \quad (11-23)$$

Dit filter geeft een betere demping voor hoge frekwenties dan het exponential smoothing filter.

Moving average filters behoren tot de klasse van *transversale filters* waarbij de uitgang $y(nT)$ slechts een functie is van de ingangsinformatie $x(nT)$, $x(nT - T)$, Algemeen geldt voor een transversaal filter:

$$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + \dots + a_m x(nT - mT)$$

of

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^m} \quad (11-24)$$

De eigenschappen van dit filter worden bepaald door de nulpunten van de overdrachtsfunctie. Indien men deze dicht bij de eenheidsdrcikel kiest door de keuze van a_0 t/m a_m zijn bepaalde frekwenties of is een bepaalde frekwentiebånd uit te filteren. Het nadeel van dit filter is dat er relatief veel geheugenplaatsen nodig zijn, t.o.v. filters met een beperkt aantal nulpunten en polen (rekursieve filters).

De werking van een transversaal filter lijkt op die van een gewichtsfunctie waarbij gebruik wordt gemaakt van een eindige rij die de gewichtsfunctie bepaalt. Soms worden deze filters daarom wel *finite memory filters* genoemd.

Indien bijvoorbeeld een transversaal filter is gewenst met de polen- en nulpuntenkonfiguratie van fig. 11.24, dan luidt de overdrachtsfunctie

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(z+j)(z-j)(z+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}j)(z+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}j)}{z^4} \\ &= \frac{(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)}{z^4} = \frac{z^4+\sqrt{3}z^3+2z^2+\sqrt{3}z+1}{z^4} \end{aligned}$$

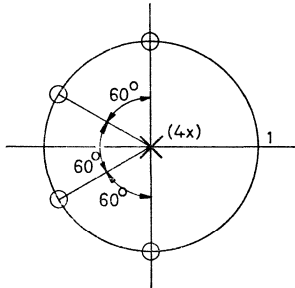


Fig. 11.24

Door de bemonsteringsfrekwentie van het filter hoger te kiezen dan de bemonsteringsfrekwentie van de regelaar kan men variaties in het ingangssignaal duidelijk afzwakken (fig. 11.25). Indien het stoorsignaal een Gauss verdeling heeft zal de variantie van het door een moving average filter bewerkte stoorsignaal met een faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ worden vermindert.

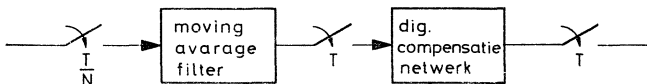


Fig. 11.25

In tegenstelling tot het exponential smoothing filter heeft het moving average filter een eindige werking op hetingangssignaal; voor $N = 4$ wordt bijvoorbeeld de informatie van slechts 4 voorgaande punten meegenomen.

Bij een exponential smoothing filter wordt alle voorgaande informatie meegenomen weliswaar met een afnemende gewichtsfactor.

In het algemeen kan men stellen dat door de plaatsing van polen en/of nulpunten langs de rand van de eenheidskring in het z -vlak een gewenste filterwerking verkregen kan worden. Door polen in het doorlaatgebied en nulpunten in het spergebied te leggen kan men een goede filterwerking verkrijgen. Polen dichtbij de eenheidskring hebben echter het bezwaar dat kleine afrondingsfouten bij de numerieke berekeningen die op deingangssignalen plaatsvinden kunnen leiden tot een instabiel gedrag van het filter. Dit probleem is niet aanwezig bij een transversaalfilter. Dit filter heeft echter weer het nadeel dat veel meer termen in de berekeningen moeten worden meegenomen; veel nulpunten op plaatsen waar men een verzwakking van het signaal wenst.

Een andere mogelijkheid van filteren is een *extrapolatiefilter* waarbij een schatting van de nieuwe informatie plaatsvindt uit de vorige informatie. Deze wijze van filteren komt voor bij radarsignalen en bij de bewerking van ingangsgegevens bij numerieke gereedschapsmachines.

Bij een *lineaire extrapolatie* gaat men als volgt te werk: (zie fig. 11.26)

$$e(t) = e(t_0) + a(t - t_0) \quad (11-25)$$

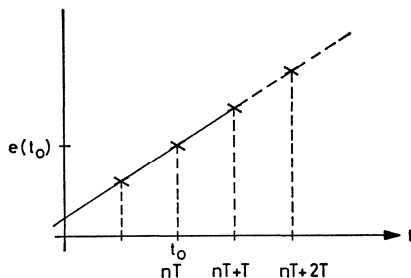


Fig. 11.26

Kies voor $t_0 = nT$ dan volgt

$$e(t) = e(nT) + a \cdot (t - nT)$$

a kan men bepalen indien tevens $e(nT+T)$ bekend is. $e(nT+T)$ volgt uit

$$e(nT+T) = e(nT) + a(nT+T - nT) = e(nT) + aT$$

Hieruit volgt: $a = \frac{1}{T} \{e(nT+T) - e(nT)\}$

Er geldt dan

$$e(t) = e(nT) + \frac{1}{T} \{e(nT+T) - e(nT)\} (t - nT)$$

Uit $e(nT)$ en $e(nT+T)$ kan dus $e(nT+2T)$ geschat worden:

$$\bar{e}(nT+2T) = e(nT) + \frac{1}{T} \{e(nT+T) - e(nT)\} 2T$$

$$\text{of } \bar{e}(nT+2T) = -e(nT) + 2e(nT+T), \quad (11-26)$$

waarin $\bar{e}(nT+2T)$ de voorspelde waarde van $e(nT+2T)$ is op het tijdstip $nT+T$ ofwel na z -transformatie:

$$\frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = 2 - z^{-1} = \frac{2z - 1}{z} \quad (11-27)$$

Bij een *parabolische extrapolatie* gaat men als volgt te werk.

De parabool wordt beschreven door de vergelijking

$$e(t) = e_0 + a(t - t_0)^2 \quad (11-28)$$

Zie fig. 11.27.

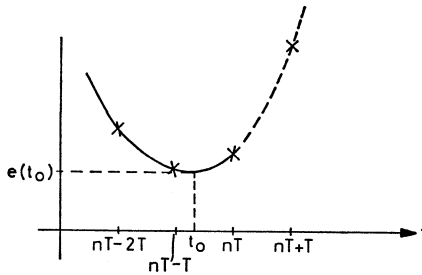


Fig. 11.27

Hierin zijn e_0 , a en t_0 te bepalen uit 3 waarden van $e(t)$ op de bemonsterings-tijdstippen: nT , $nT-T$ en $nT-2T$.

Immers :

$$\begin{aligned} e(nT) &= e_0 + a(nT - t_0)^2 = e_0 + a(n^2 T^2 - 2nTt_0 + t_0^2) \\ e(nT-T) &= e_0 + a(nT - T - t_0)^2 \\ &= e_0 + a(n^2 T^2 - 2nT^2 + T^2 - 2nTt_0 + 2Tt_0 + t_0^2) \\ e(nT-2T) &= e_0 + a(nT - 2T - t_0)^2 \\ &= e_0 + a(n^2 T^2 - 4nT^2 + 4T^2 - 2nTt_0 + 4Tt_0 + t_0^2) \end{aligned}$$

Hieruit kunnen a , e_0 en t_0 berekend worden.

Voor de geschatte waarde $\bar{e}(nT+T)$ volgt tenslotte:

$$\bar{e}(nT+T) = 3e(nT) - 3e(nT-T) + e(nT-2T), \quad (11-29)$$

waarin $\bar{e}(nT+T)$ de voorspelde waarde van $e(nT+T)$ is op het tijdstip nT of wel na z -transformatie:

$$\frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = 3 - 3z^{-1} + z^{-2} = \frac{3z^2 - 3z + 1}{z^2} \quad (11-30)$$

Tenslotte wordt nog gewezen op de mogelijkheid gemeten data eerst te bewerken voordat er verdere berekeningen mee worden uitgevoerd (*off-line filter*). Hierbij kan men voor de gefilterde informatie $\bar{e}(nT)$ gebruik maken van alle beschikbare informatie op tijdstippen $t = kT$ met $k = \dots n-1, n, n+1, \dots$. Een eenvoudig filter is het volgende:

$$\bar{e}(nT) = \frac{1}{4} \{e(nT-T) + 2e(nT) + e(nT+T)\} \quad (11-31)$$

Na z -transformatie geldt:

$$\frac{\bar{E}(z)}{E(z)} = \frac{1}{4}(z^{-1} + 2 + z) = \frac{1}{4} \left(\frac{z^2 + 2z + 1}{z} \right) = \frac{1}{4} \frac{(z+1)^2}{z} \quad (11-32)$$

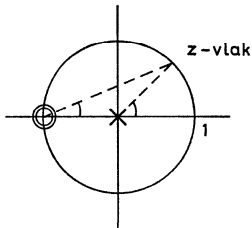


Fig. 11.28

Zoals uit het polen- en nulpuntenbeeld blijkt geeft dit filter voor elke frequentie een fasebijdrage nul.

XII. Toestandsbeschrijving van regelsystemen

12.1 INLEIDING

Sinds de jaren zestig is de beschrijving van systemen met behulp van toestandsvergelijkingen sterk opgekomen. Het is daarom alvorens deze methode te behandelen zinvol deze methode te vergelijken met de klassieke analyse- en ontwerpmethoden zoals de frekwentieresponsiemethode en de polen- en nulpuntenmethode. Enige voor- en nadelen van de toestandsbeschrijving t.o.v. de klassieke methoden zijn:

1. De toestandsbeschrijving formuleert het systeem in het tijddomein. Door gebruik te maken van een beschrijfwijze in matrices en vektoren ontstaat een compacte formulering; de berekening is echter omvangrijk ook voor problemen die m.b.v. de Laplace- of z-transformatie snel oplosbaar zijn.

Meer ingewikkelde systemen, zoals systemen met meer in- en uitgangen en tijdafhankelijke systemen, die m.b.v. de klassieke methoden niet of nauwelijks oplosbaar zijn, vereisen als ze met toestandsvergelijkingen worden beschreven weinig meer werk dan voor eenvoudige systemen. In fig. 12.1 is zeer kwalitatief hiervan een beeld geschetst, waarbij de „ingewikkeldheid” van het systeem toeneemt van lineaire systemen met één in- en uitgang, via lineaire systemen met meer in- en uitgangen naar niet-lineaire en tijdafhankelijke systemen.

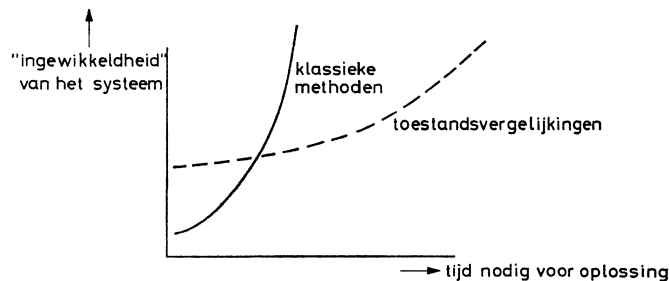


Fig. 12.1

2. Bij de toestandsbeschrijving staat centraal het begrip *toestand*; hiermee wordt alle informatie bedoeld die op een zeker tijdstip nodig is om het volledige gedrag van een systeem te kunnen bepalen, d.w.z. zowel de externe

dynamica (ingangs- uitgangsrelatie) als interne dynamica (wat gebeurt er in het systeem zelf) worden bij deze methode bepaald. Ook beginvoorwaarden ongelijk aan nul worden in de toestandsbeschrijving zonder verdere complicaties direkt meegenomen, en zijn vaak zelfs essentieel in de probleemstelling.

Bij klassieke methoden staat centraal de ingangs- uitgangsrelatie van een systeem, beschreven door de overdrachtsfunctie.

3. Bij de toestandsbeschrijving is het gebruikelijk de waardering voor het ontworpen systeem in een integraalkriterium uit te drukken.

Hierin komen alle van belang zijnde grootheden voor en is de regeling door wijziging van de weegfactoren in dit criterium op een systematische wijze te beïnvloeden. Het regelprobleem leidt dan tot een optimaliseringsprobleem, waarbij de toestandsbeschrijving reeds de juiste formulering van het systeemgedrag geeft die aanpast op de optimaliseringsmethoden (b.v. optimaliseren volgens de methode van Pontryagin of dynamisch programmeren).

Bij de klassieke methoden heeft men veeleer te maken met een gevoelsmatige aanpak van het optimaliseringsprobleem, waarin de optimale oplossing tot uitdrukking komt in een aantal specifieke kenmerken, zoals fase- en versterkingsmarge, en relatieve en absolute dempingsfactoren.

Juist bij systemen waarbij interactie optreedt tussen diverse regelingen en waarbij een maximaal rendement wordt vereist van het gehele complex van regelkringen is door invoering van een beoordelingskriterium waarin het volledige gedrag van het systeem tot uitdrukking komt de toestandsbeschrijving een beter uitgangspunt dan de klassieke beschrijvingswijze.

4. In de toestandsbeschrijving is het niet altijd eenvoudig snel een verband te leggen met het fysische systeem. Speciale vormen van toestandsbeschrijving komen aan dit bezwaar enigszins tegemoet. Voor systemen met meer in- en uitgangen bieden de klassieke methoden echter ook geen snel inzicht in het voornaamste systeemgedrag.

5. Hoewel tot nu toe de toepassing van de toestandsbeschrijving voornamelijk beperkt is tot lineaire systemen, is het in principe mogelijk ook het gedrag van niet-lineaire en tijdafhankelijke systemen hiermee te beschrijven. Dit is niet mogelijk met de klassieke methoden. Met name in het stabiliteitsonderzoek van niet-lineaire systemen is de toestandsbeschrijving bruikbaar gebleken (tweede methode van Liapunov en de daaruit afgeleide methoden).

6. Bij de theoretische modelvorming van systemen kan men direkt komen tot een beschrijving van systemen in toestandsvergelijkingen. De klassieke methoden sluiten meer aan bij de experimentele modelvorming van systemen met behulp van testsignalen.

12.2 BESCHRIJVING VAN KONTINUE SYSTEMEN IN TOESTANDSVERGELIJKINGEN

Elk dynamische systeem wordt volledig beschreven indien het verloop van een aantal karakteristieke grootheden die het systeem beschrijven volledig bekend is. Bij een massa-veersysteem waarin de grootte van de massa en de eigenschappen van de veer en de demper bekend zijn, ligt de beschrijving van het gehele systeem vast indien op elk moment de positie en de snelheid van de massa bekend is. Bovendien moet natuurlijk de uitwendige kracht die op dit systeem werkt bekend zijn. Het massa-veersysteem (zie ook monografie I, hoofdstuk V) wordt beschreven door een tweede orde differentiaalvergelijking. De orde van het systeem bepaalt tevens het aantal karakteristieke grootheden (de toestand) van het systeem indien het systeem lineair is. De toestand is dus i.h.a. een meerdimensionale grootheid en kan voorgesteld worden door een vektor. De toestand van een systeem wordt als volgt gedefinieerd.

De toestand $\underline{x}(t_0)$ van een systeem omvat alle informatie om het gedrag van het systeem vanaf $t = t_0$ volledig te bepalen indien tevens de sturing vanaf t_0 bekend is en de systeemvergelijkingen gegeven zijn.

Voorbeeld 12.1

Stel dat een systeem beschreven wordt door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_2 y(t) = K u(t)$$

Er moet aan de volgende voorwaarden worden voldaan om de toestand van het systeem vast te leggen.

1. De specifieke eigenschappen van het systeem moeten bekend zijn, d.w.z. b_1 , b_2 en K en bovendien moet de algemene gedaante van de vergelijking bekend zijn.
2. Indien als begintijdstip $t = t_0$ gekozen wordt, dient $u(t)$ vanaf $t = t_0$ bekend te zijn.
3. Als toestand kan gekozen worden $y(t)$ en $\frac{dy}{dt}$ d.w.z. $y(t)$ en $\frac{dy(t)}{dt}$ op het tijdstip $t = t_0$ moeten gegeven zijn, om vanaf $t = t_0$ het gedrag van het systeem volledig vast te leggen.

De toestand $\left(y(t), \frac{dy}{dt}\right)$ is impliciet aanwezig in de differentiaalvergelijking. Door de differentiaalvergelijking te splitsen in twee eerste orde differentiaalvergelijkingen wordt een expliciete beschrijving van de toestandsgrootheden verkregen:

$$\text{Stel } y(t) = x_1(t) \quad \text{en} \quad \frac{dy(t)}{dt} = x_2(t)$$

dan kan de tweede orde differentiaalvergelijking gesplitst worden in de volgende eerste orde differentiaalvergelijkingen in

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = -b_2 x_1(t) - b_1 x_2(t) + K u(t). \end{cases} \quad (12-1)$$

Het is gebruikelijk deze vergelijkingen in matrixvorm te noteren:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \quad (12-1)$$

d.w.z. voor dit voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} u$$

met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$

Deze beschrijfwijze is ook mogelijk voor systemen met meer ingangen. De vektor \underline{b} wordt dan een matrix, terwijl u een vektoriële grootheid wordt.

Voorbeeld 12.2

Een systeem met 2 ingangen wordt voorgesteld door het volgende blok-schema (fig. 12.2).

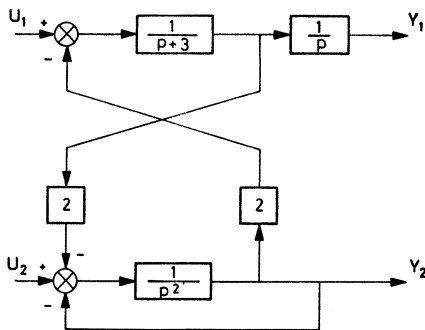


Fig. 12.2

Dit systeem wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + 3 \frac{dy_1}{dt} = u_1 - 2y_2$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = u_2 - 2 \frac{dy_1}{dt} - y_2$$

Stel $x_1 = y_1$ en $x_2 = \frac{dy_1}{dt}$

$x_3 = y_2$ en $x_4 = \frac{dy_2}{dt}$

Het stelsel toestandsvergelijkingen wordt hiermee aldus:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2x_2 - x_3 + u_2 \end{cases}$$

of in matrix-vorm notatie: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ (12-2)

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \underline{u}$$

met

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

De vergelijking $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ geeft de interne dynamika van het systeem weer. Vaak is men vooral geïnteresseerd in de waarde van de uitgangsgrootheid van het systeem, beschreven als functie van de ingang en de toestand.

In het algemeen kan gesteld worden:

$$y = C\underline{x} + D\underline{u} \quad (12-3)$$

waarin y de uitgangsgrootheden weergeeft.

Voor voorbeeld 12.1 geldt:

$$y = x_1 \quad \text{dus} \quad y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0) u$$

$$\text{met } C = \underline{c}^T = (1 \ 0) \text{ en } D = 0$$

Voor voorbeeld 12.2 geldt:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ of in matrixvorm}$$

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_C \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_D \underline{u}$$

Algemeen wordt een lineair tijdonafhankelijk systeem van de n^{de} orde met p ingangen en m uitgangen dus beschreven door de volgende toestandsvergelijkingen:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad (12-4)$$

waarin A een $n \times n$ matrix, B een $n \times p$ matrix, \underline{x} en $\dot{\underline{x}}$ n -dimensionale vektoren zijn, en \underline{u} een p -dimensionale vektor is.

De uitgangsrelatie luidt als volgt:

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \quad (12-5)$$

waarin C een $m \times n$ matrix, D een $m \times p$ matrix en \underline{y} een m dimensionale vektor is. Voor systemen met één ingang u en één uitgang y worden deze vergelijkingen:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u \text{ en} \quad (12-6)$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} + du \quad (12-7)$$

waarin \underline{b} een n dimensionale vektor, \underline{c}^T een n dimensionale getransponeerde vektor en d een scalar is. In vele gevallen zal $d = 0$ zijn.

De toestand van een systeem kan op verschillende manieren voor een bepaald gegeven systeem samengesteld worden.

De *dimensie* van de toestand blijft echter ongewijzigd.

Voorbeeld 12.3

Gegeven een systeem beschreven door $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = u$ (zie fig. 12.3).

Dit systeem wordt beschreven door 2 toestandsgrootheden x_1 en x_2 .

De toestand kan op een aantal wijzen gekozen worden.

Keuze 1. $y = x_1$ en $\frac{dy}{dt} = x_2$. Er geldt:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

en $y = (1 \ 0) \underline{x}$

Keuze 2

Uit fig. 12.4 waarin de overdrachtsfunctie van het systeem is opgesplitst in twee eerste orde overdrachtsfuncties volgt:

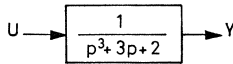


Fig. 12.3

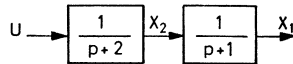


Fig. 12.4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 + 2x_2 = u \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \end{cases}$$

of in matrix vorm:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{en} \quad y = (1 \quad 0) \underline{x}$$

Keuze 3. Uit fig. 12.5 waarin de overdrachtsfunctie van het systeem is opgesplitst in twee paralleltakken volgt:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = u \\ \dot{x}_2 + 2x_2 = -u \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \end{cases}$$

$$y = x_1 + x_2$$

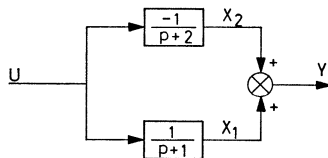


Fig. 12.5

of in matrixvorm:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u \quad \text{en} \quad y = (1, \quad 1) \underline{x}$$

Er zijn (aftelbaar) oneindig veel mogelijke toestandsbeschrijvingen van hetzelfde systeem mogelijk. Elke lineair onafhankelijke combinatie van de elementen van \underline{x} levert weer een nieuwe toestand \underline{x}^1 op.

12.3 OPLOSSING VAN DE KONTINUE TOESTANDSVERGELIJKINGEN

Het $\dot{\underline{x}}$ stelsel toestandsvergelijkingen:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

kan opgelost worden indien A en B bekend zijn, $\underline{x}(t_0)$ bekend is en \underline{u} vanaf $t = t_0$ bekend is. Neem $t_0 = 0$. Eerst wordt het homogene geval bekeken waarin dus $\underline{u} = \underline{0}$.

Stel dat de oplossing een machtreeks is van de volgende gedaante:

$$\underline{x}(t) = (I + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \dots) \underline{x}(0) \quad (12-8)$$

waarin $I, K_1, K_2 \dots n \times n$ matrices zijn.

Er geldt dan:

$$\dot{\underline{x}}(t) = (K_1 + 2K_2 t + 3K_3 t^2 + \dots) \underline{x}(0) \quad (12-9)$$

Dit ingevuld in de toestandsvergelijking $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ geeft:

$$(K_1 + 2K_2 t + 3K_3 t^2) \underline{x}(0) = (AI + AK_1 t + \dots) \underline{x}(0) \quad (12-10)$$

waarin I de eenheidsmatrix is.

Uit (12-10) volgt:

$$K_1 = A$$

$$2K_2 = AK_1 = A^2 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2!} A^2$$

$$3K_3 = AK_2 = \frac{1}{2} A^3 \Rightarrow K_3 = \frac{1}{3!} A^3 \quad (12-11)$$

enz.

$$\text{Algemeen kan dus gesteld worden : } K_n = \frac{1}{n!} A^n \quad (12-12)$$

zodat de algemene oplossing van de toestandsvergelijking wordt:

$$\underline{x}(t) = \left(I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots \right) \underline{x}(0)$$

Een eigenschap van de matrixfunctie e^{At} (zie monografie III) is echter:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots \quad (12-13)$$

zodat geldt:

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) \quad (12-14)$$

Voor $t_0 \neq 0$ kan worden afgeleid: $\underline{x}(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0)$.

Vervolgens wordt het niet-homogene geval beschouwd:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{of} \quad (\dot{\underline{x}} - A\underline{x}) = B\underline{u} \quad (12-15)$$

Vermenigvuldig met e^{-At} , dan geldt:

$$e^{-At}(\dot{\underline{x}} - A\underline{x}) = e^{-At} B\underline{u}. \quad (12-16)$$

Een eigenschap van matrixfuncties is de volgende:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At} \underline{x}) = -Ae^{-At} \underline{x} + e^{-At} \dot{\underline{x}} = e^{-At}(-A\underline{x} + \dot{\underline{x}}) \quad (12-17)$$

Door gebruik te maken van deze eigenschap volgt:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At} \underline{x}) = e^{-At} B\underline{u} \quad (12-18)$$

Deze uitdrukking wordt nu geïntegreerd van $t = 0$ tot t :

$$e^{-At} \underline{x}(t) - \underline{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau} B\underline{u}(\tau) d\tau. \quad (12-19)$$

Vermenigvuldig vervolgens beide zijden met e^{At} dan volgt:

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau) d\tau. \quad (12-20)$$

Dit is de algemene oplossing van de toestandsvergelijking $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$.

De eerste term van het rechterlid van (12-20) geeft het overgangsverschijnsel weer indien geen ingang aan het systeem wordt aangeboden maar het systeem in een begintoestand $\underline{x}(0)$ verkeert.

De tweede term van het rechterlid van (12-20) is verantwoordelijk voor het overgangsverschijnsel tengevolge van de ingang \underline{u} over het tijdinterval 0 tot t . Indien als begintijdstip $t = t_0$ wordt gekozen luidt de oplossing van de toestandsvergelijkingen:

$$\underline{x}(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau) d\tau. \quad (12-21)$$

De matrix $e^{A(t-t_0)}$, algemeen gedefinieerd als $\Phi(t, t_0)$ wordt de fundamentele of oplossingsmatrix van het systeem genoemd.

Een uitvoerige beschrijving van continue systemen in toestandsvergelijking vindt plaats in monografie III. In deze paragraaf zijn slechts algemene aspecten naar voren gekomen die van belang zijn voor de volgende paragrafen.

12.4 BESCHRIJVING VAN DISKRETE ELEMENTEN IN TOESTANDSVERGELIJKINGEN

In digitale regelsystemen en systemen met signaalbemonstering komen zowel diskrete elementen voor beschreven door differentievergelijkingen als continue elementen beschreven door differentiaalvergelijkingen waarvan het ingangssignaal tussen bemonsteringstijdstippen konstant gehouden wordt, indien wordt aangenomen dat deze elementen voorafgegaan worden door nulde orde houdschakelingen.

Ook voor systemen met signaalbemonstering en digitale regelsystemen kunnen toestandvergelijkingen worden opgesteld die het systeem volledig beschrijven (diskrete elementen) of alleen op de bemonsteringstijdstippen (bemonsterde continue elementen).

Voor diskrete lineaire elementen gelden de volgende vergelijkingen:

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \quad (\text{toestandvergelijking}) \quad (12-22)$$

$$\underline{y}(k) = C\underline{x}(k) + D\underline{u}(k) \quad (\text{uitgangsrelatie}) \quad (12-23)$$

Deze vergelijkingen beschrijven de toestand op elk diskreet moment als een functie van de voorgaande waarde van de toestand en de toegevoerde ingang. Indien de toestand $\underline{x}(0)$ en de ingang $\underline{u}(k)$ voor $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ bekend zijn kan op iteratieve wijze de toestand $\underline{x}(k)$ bepaald worden:

$$\underline{x}(1) = A\underline{x}(0) + B\underline{u}(0) \quad \text{hieruit volgt } \underline{x}(1)$$

$$\underline{x}(2) = A\underline{x}(1) + B\underline{u}(1) \quad \text{hieruit volgt } \underline{x}(2)$$

enzovoort.

Hieruit valt af te leiden dat de toestand van diskrete systemen eenvoudiger te bepalen is dan van continue systemen.

Het is ook mogelijk uitgaande van de toestand $\underline{x}(0)$ en de ingang $\underline{u}(k)$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$ de toestand $\underline{x}(k)$ te bepalen zonder de tussenliggende toestanden hiervoor te gebruiken.

$$\underline{x}(1) = A\underline{x}(0) + B\underline{u}(0)$$

$$\underline{x}(2) = A(A\underline{x}(0) + B\underline{u}(0)) + B\underline{u}(1) = A^2\underline{x}(0) + AB\underline{u}(0) + B\underline{u}(1)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}(3) &= A(A^2\underline{x}(0) + AB\underline{u}(0) + B\underline{u}(1)) + B\underline{u}(2) = \\ &= A^3\underline{x}(0) + A^2B\underline{u}(0) + AB\underline{u}(1) + B\underline{u}(2) \end{aligned}$$

Algemeen geldt:

$$\underline{x}(N) = A^N \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} B \underline{u}(i) \quad (12-24)$$

D.w.z. de toestand wordt bepaald door een term afkomstig van de beginvoorwaarde en een term afkomstig van het ingangssignaal.

Voor de uitgangsverhouding wordt gevonden:

$$\begin{aligned} y(N) &= C\underline{x}(N) + D\underline{u}(N) \\ &= CA^N \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} CA^{N-1-i} B\underline{u}(i) + D\underline{u}(N) \end{aligned} \quad (12-26)$$

De impulsresponsie van het systeem volgt eveneens hieruit door als ingang de reeks $\{1, 0, 0, 0, \dots\}$ toe te voeren en de beginvoorwaarde $\underline{x}(0) = \underline{0}$ te kiezen. Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} y(0) &= D \\ y(N) &= CA^{N-1} B\underline{u}(0) \text{ met } N = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (12-27)$$

Voorbeeld 12.4

Een kleinhandelaar bestelt periodiek een bepaald produkt bij een groot-handelaar. De kleinhandelaar verkoopt in deze termijn steeds hetzelfde aantal, 1000 stuks. Bovendien wil hij graag 300 stuks in voorraad hebben op de besteldatum.

Zijn bestelbeleid is de volgende:

bestel voor de aankomende periode hetzelfde aantal dat de voorgaande periode verkocht is, vermeerderd of verminderd met het aantal dat afwijkt van de buffervoorraad.

1. Beschrijf wat er gebeurt als de verkoop terugvalt van 1000 naar 900.
2. Beschrijf wat er gebeurt als de verkoop gaat wisselen gedurende de eerst-volgende perioden van 900 tot 1100 en omgekeerd.

Aangenomen wordt dat de levertijd kleiner is dan de periodeduur.

De toestand waarin de kleinhandelaar geïnteresseerd is, en die hij zelf kan beïnvloeden is de bestelling $x_1(N)$ voor periode N , en de voorraad op het tijdstip N : $x_2(N)$.

Deze toestandsgrootheden worden beïnvloed door de verkoop over een bepaalde periode: $u_1(N)$ en de gewenste buffervoorraad $u_2(N)$ op een bepaald tijdstip.

De grootheid u_2 kan echter ook als een setpoint worden opgevat. De volgende toestandsvergelijkingen gelden bij de gevulde bestelbeleid:

$$\begin{aligned} x_1(N+1) &= u_1(N) + u_2(N+1) - x_2(N+1) \\ x_2(N+1) &= x_2(N) + x_1(N) - u_1(N) \end{aligned}$$

Substitueer de tweede vergelijking in de eerste, terwijl tevens $u_2(N+1) = u_2(N) = 300$ voor alle N ,

dan volgt hieruit het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} x_1(N+1) &= -x_1(N) - x_2(N) + 2u_1(N) + u_2(N) \\ x_2(N+1) &= x_1(N) + x_2(N) - u_1(N) \end{aligned}$$

of in matrixvorm geschreven:

$$\underline{x}(N+1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(N) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}(N)$$

Oplossing eerste probleem: De verkoop valt terug van 1000 naar 900 stuks. De volgende gegevens staan ter beschikking:

$$x_1(0) = 1000, x_2(0) = 300, u_1(0) = 900$$

$$u_2(N) = 300$$

Iteratieve methode:

$$x_1(1) = -x_1(0) - x_2(0) + 2u_1(0) + u_2(0) = -1000 - 300 + 1800 + 300 = 800$$

$$x_2(1) = x_1(0) + x_2(0) - u_1(0) = 1000 + 300 - 900 = 400$$

$$x_1(2) = -x_1(1) - x_2(1) + 2u_1(1) + u_2(1) = -800 - 400 + 1800 + 300 = 900$$

$$x_2(2) = x_1(1) + x_2(1) - u_1(1) = 800 + 400 - 900 = 300$$

$$x_1(3) = -x_1(2) - x_2(2) + 2u_1(2) + u_2(2) = -900 - 300 + 1800 + 300 = 900$$

enzovoort.

Uitgaande van de beginvoorwaarde en de ingang wordt (12-24) gebruikt.

$$\text{Aangezien } A.A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ontstaat de volgende oplossing

$$\underline{x}(1) = A\underline{x}(0) + B\underline{u}(0) \text{ en}$$

$$\underline{x}(N) = B\underline{u}(N-1) + A B \underline{u}(N-2) \text{ voor } N > 1$$

$$\text{Dus } \underline{x}(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

en $\underline{x}(N)$ voor $N > 1$

$$\underline{x}(N) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$x_1(N)$, $x_2(N)$, $u_1(N)$ en $u_2(N)$ zijn in fig. 12.6 weergegeven.

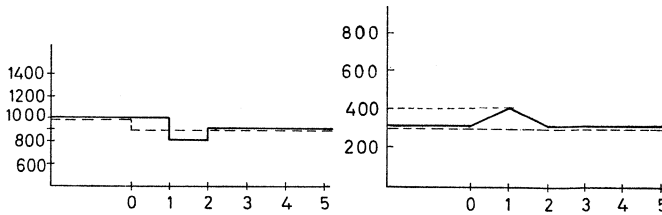


Fig. 12.6

Oplossing tweede probleem: De verkoop wisselt periodiek tussen 900 en 1100 stuks. De volgende gegevens staan ter beschikking.

$$x_1(0) = 1000, x_2(0) = 300, u_1(0) = 900$$

$$u_1(1) = 1100, u_1(2) = 900, \text{ enzovoort en } u_2(0) = 300.$$

Iteratieve methode:

$$x_1(1) = -x_1(0) - x_2(0) + 2u_1(0) + u_2(0) = -1000 - 300 + 1800 + 300 = 800$$

$$x_2(1) = x_1(0) + x_2(0) - u_1(0) = 1000 + 300 - 900 = 400$$

$$x_1(2) = -x_1(1) - x_2(1) + 2u_1(1) + u_2(1) = -800 - 400 + 2200 + 300 = 1300$$

$$x_2(2) = x_1(1) + x_2(1) - u_1(1) = 800 + 400 - 1100 = 100$$

$$x_1(3) = -x_1(2) - x_2(2) + 2u_1(2) + u_2(2) = -1300 - 100 + 1800 + 300 = 700$$

$$x_2(3) = x_1(2) + x_2(2) - u_1(2) = 1300 + 100 - 900 = 500$$

enzovoort.

Oplosmethode volgens (12-24)

$$\underline{x}(1) = A\underline{x}(0) + B\underline{u}(0) = \begin{pmatrix} 800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}(N) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(N-1) \\ u_2(N-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(N-2) \\ u_2(N-2) \end{pmatrix}$$

Als N even is, geldt $u_1(N-1) = 1100$

en als N oneven is geldt $u_1(N-1) = 900$

Bovendien geldt: $u_2(N-1) = u_2(N-2) = 300$

Voor N even geldt:

$$\begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1100 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

voor N oneven geldt:

$$\begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$x_1(N)$, $x_2(N)$, $u_1(N)$ en $u_2(N)$ zijn in fig. 12.7 weergegeven.

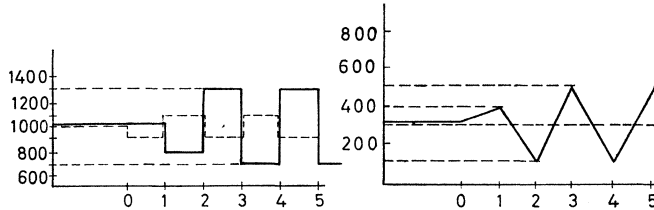


Fig. 12.7

De bestelpolitiek blijkt goed te voldoen voor blijvende verstoringen, maar blijkt slecht te voldoen voor wisselende verstoringen.

12.5 BESCHRIJVING VAN KONTINUE ELEMENTEN VOORAFGEGAAN DOOR EEN NULDE ORDE HOUDSCHAKELING IN TOESTANDSVERGELIJKINGEN

De delen van een systeem die continu en lineair zijn worden beschreven door het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{en} \quad y = C\underline{x} + D\underline{u} \quad (12-28)$$

De oplossing van dit stelsel luidt:

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (12-29)$$

In een signaalbemonsterd systeem met een nulde orde houdschakeling wordt het ingangssignaal $\underline{u}(\tau)$ constant gehouden gedurende de bemonsteringsperiode zodat geldt: $\underline{u}(t) = \underline{u}(NT)$ gedurende het tijdsinterval $NT \leq t < NT + T$.

De oplossing van de toestandsvergelijkingen gaat op het bemonsterings-tijdstip $t = T$ over in de volgende vergelijking met begintijd $t_0 = 0$

$$\underline{x}(T) = e^{AT} \underline{x}(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (12-30)$$

Gedurende het tijdsinterval $0 \leq t < T$ geldt dat $\underline{u}(\tau) = \underline{u}(0)$ zodat

$$\underline{x}(T) = e^{AT} \underline{x}(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau \cdot \underline{u}(0). \quad (12-31)$$

Indien $\int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau = H(T)$ wordt gesteld, geldt dus (12-32)

$$\underline{x}(T) = e^{AT} \underline{x}(0) + H(T) \underline{u}(0). \quad (12-33)$$

Voor het tijdstip $t = 2T$ kan de volgende vergelijking worden genoteerd als de begintijd $t_0 = T$ gekozen wordt.

$$\underline{x}(2T) = e^{AT} \underline{x}(T) + \int_T^{2T} e^{A(2T-\tau)} B d\tau \cdot \underline{u}(T) \quad (12-34)$$

Stel $\tau^1 = \tau - T$ dan gaat deze uitdrukking over in

$$\begin{aligned} &= e^{AT} \underline{x}(T) + \int_0^T e^{A(T-\tau^1)} B d\tau^1 \cdot \underline{u}(T) \\ &= e^{AT} \underline{x}(T) + H(T) \underline{u}(T) \end{aligned} \quad (12-35)$$

Algemeen geldt dus:

$$\underline{x}(NT) = e^{AT} \underline{x}(NT-T) + H(T) \underline{u}(NT-T) \quad (12-36)$$

De toestand van het continue element is dus langs iteratieve weg volgens bovenstaande formule te bepalen op de bemonsteringstijdstippen.

Voor een niet-singuliere matrix A d.w.z. $\det A \neq 0$, kan $H(T)$ bepaald worden als volgt:

$$\begin{aligned} H(T) &= \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau = e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} B d\tau \\ &= e^{AT} \int_0^T \left[I - A\tau + \frac{A^2 \tau^2}{2!} - \frac{A^3 \tau^3}{3!} + \dots \right] B d\tau \\ &= e^{AT} \left[I\tau - \frac{A\tau^2}{2!} + \frac{A^2 \tau^3}{3!} \dots \right]_0^T B \\ &= e^{AT} A^{-1} \left[-I + AT - \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} \dots + I \right] B \\ &= e^{AT} A^{-1} [I - e^{-AT}] B = A^{-1} [e^{AT} - I] B \end{aligned} \quad (12-37)$$

omdat $e^{AT} A^{-1} = A^{-1} e^{AT}$, hetgeen door uitschrijven van e^{AT} aangetoond kan worden. Het is mogelijk ook bij deze systemen $\underline{x}(NT)$ te schrijven als de som van een term afkomstig van de beginvoorwaarde $\underline{x}(0)$ en een term afkomstig van de ingangsignalen $\underline{u}(0)$, $\underline{u}(T)$, $\underline{u}(2T)$, enzovoort.

Er geldt namelijk:

$$\begin{aligned} \underline{x}(2T) &= e^{AT} \underline{x}(T) + H(T) \underline{u}(T) \\ &= e^{AT} (e^{AT} \underline{x}(0) + H(T) \underline{u}(0)) + H(T) \underline{u}(T) \\ &= (e^{AT})^2 \underline{x}(0) + e^{AT} H(T) \underline{u}(0) + H(T) \underline{u}(T) \end{aligned}$$

Algemeen geldt:

$$\underline{x}(NT) = (e^{AT})^N \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} (e^{AT})^{N-1-i} H(T) \underline{u}(iT) \quad (12-38)$$

De toestandsbeschrijving op de bemonsteringstijdstippen van lineaire signaalbemonsterde systemen voorafgegaan door een nulde orde houdschakeling is equivalent met de toestandsbeschrijving van diskrete elementen.

Het is echter ook mogelijk bij continue elementen de toestand te bepalen op tijdstippen die tussen de bemonsteringstijdstippen inliggen.

Op het tijdstip $NT + \Delta T$ met $0 < \Delta < 1$ geldt het volgende:

$$\underline{x}(NT + \Delta T) = e^{A\Delta T} \underline{x}(NT) + H(\Delta T) \underline{u}(NT) \quad (12-39)$$

$$\text{met } H(\Delta T) = \int_0^{\Delta T} e^{A(\Delta T - \tau)} B d\tau. \quad (12-40)$$

Voorbeeld 12.5

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u$$

Op de bemonsteringstijdstippen geldt:

$$x(NT + T) = e^{-aT} x(NT) - \frac{1}{a} (e^{-aT} - 1) u(NT)$$

Tussen de bemonsteringstijdstippen geldt:

$$x(NT + \Delta T) = e^{-a\Delta T} x(NT) + \frac{1}{a} (1 - e^{-a\Delta T}) u(NT)$$

12.6 OPLOSMETHODEN VOOR $(e^{AT})^N$ EN A^N

Voor de oplossing van de vergelijkingen die de toestand beschrijven is het nodig de matrices e^{AT} , $(e^A)^{\Delta T}$, $(e^{AT})^N$ en A^N te bepalen.

Oplossing van deze matrixfuncties is mogelijk via diverse methoden. Het rekenwerk neemt snel toe met de orde van A en het zal daarom veelal nodig zijn hiervoor een rekenmachineprogramma te schrijven.

Op een vijftal mogelijke oplosmethoden wordt in appendix B nader ingegaan. Deze methoden zijn:

1. toepassing van de inverse Laplacetransformatie of de inverse z-transformatie. Deze procedure vereist veel werk en bovendien de inversie van een matrix waarin de elementen functies van p resp. z zijn. Voor eenvoudige systemen is deze procedure met de hand uit te voeren. De procedure is niet geschikt voor een numerieke oplosmethode.
2. toepassing van het theorema van Leverrier.

- Deze procedure vereist geen matrix inversie en is bovendien een iteratieve procedure zodat de methode eenvoudig te programmeren is. Bij de terugtransformatie ontstaan echter problemen omdat gemeenschappelijke factoren in de teller- en noemerpolynomen opgespoord moeten worden.
3. diagonaliseren van de matrix. Hierbij dient de matrix A of e^{AT} eerst gediagonaliseerd te worden, hetgeen de berekening van de eigenwaarden en eigenvektoren vereist. De inversie van een diagonale matrix is echter eenvoudig, te meer daar de elementen geen functies van p of z zijn.
 4. toepassing van het theorema van Cayley-Hamilton. Hierbij wordt de matrixfunctie ontwikkeld in een eindige som van matrices. Deze methode vereist de bepaling van de eigenwaarden van het systeem en het oplossen van n vergelijkingen met n onbekenden.
 5. reeksontwikkeling van e^{AT} . Het aantal termen dat meegenomen moet worden is vaak groot (slechte convergentie), vooral indien de eigenwaarden van het systeem ver uit elkaar liggen. De berekening van A^N kan plaatsvinden door A^{N-1} te vermenigvuldigen met A . Dit vereist voor elke waarde van N een nieuwe berekening (matrixvermenigvuldiging).

12.7 DE OVERDRACHTSFUNKTIE EN DE OVERDRACHTSMATRIX VAN BEMONSTERDE EN DIGITALE SYSTEMEN

Een diskreet systeem wordt als volgt beschreven:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= C\underline{x}(k) + D\underline{u}(k) \end{aligned} \quad (12-41)$$

Door hierop de z -transformatie toe te passen ontstaat:

$$z\underline{X}(z) - z\underline{x}(0) = A\underline{X}(z) + B\underline{U}(z) \quad (12-42)$$

$$\underline{Y}(z) = C\underline{X}(z) + D\underline{U}(z) \quad (12-43)$$

Uit (12-42) volgt $\underline{X}(z)$

$$\underline{X}(z) = (zI - A)^{-1} z\underline{x}(0) + (zI - A)^{-1} B\underline{U}(z) \quad (12-44)$$

Dit ingevuld in (12-43) geeft

$$\underline{Y}(z) = C(zI - A)^{-1} z\underline{x}(0) + [C(zI - A)^{-1} B + D] \underline{U}(z) \quad (12-45)$$

Hieruit volgt de overdrachtsmatrix van het systeem indien het systeem meer in- en uitgangen heeft door $\underline{x}(0) = \underline{0}$ te stellen.

$$\frac{\underline{Y}(z)}{\underline{U}(z)} = C(zI - A)^{-1} B + D \quad (12-46)$$

Als het systeem één ingang en één uitgang heeft luidt de overdrachtsfunctie:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \underline{c}^T (zI - A)^{-1} \underline{b} + d = H(z) \quad (12-47)$$

In vele gevallen is $d = 0$.

De overdrachtsmatrix of overdrachtsfunctie kan ook bepaald worden uit de impulsresponsie (d.w.z. de responsie op de ingangrij $\{1, 0, 0, 0, \dots\}$.)

Indien $\underline{x}(0) = \underline{0}$ volgt: $y(N) = C\underline{x}(N) + D\underline{u}(N)$
 met $\underline{x}(N) = A^{N-1}B$, omdat $\underline{u}(0) = 1$ met $\underline{u}(N) = 0$ voor $N \geq 1$.

$$Y(z) = \sum_{N=0}^{\infty} y(N) z^{-N} = \sum_{N=1}^{\infty} CA^{N-1} B z^{-N} \quad (12-48)$$

Deze afleiding geldt indien $D = 0$.

De overdrachtsmatrix en overdrachtsfunctie zijn hieronder schematisch weergegeven (fig. 12.8 en 12.9).

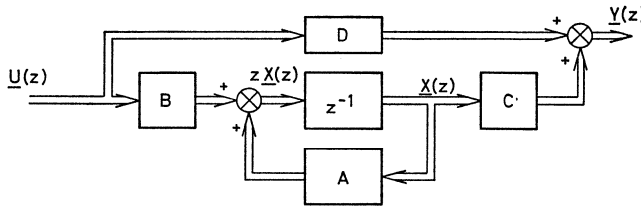


Fig. 12.8

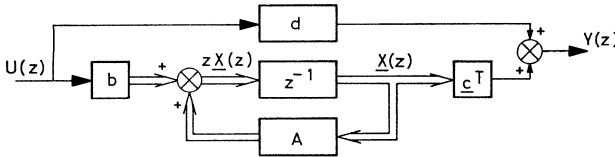


Fig. 12.9

12.8 GEKOMBINEERDE SYSTEMEN

Indien het systeem is opgebouwd uit elementen die op zichzelf beschreven worden door toestandsvergelijkingen kan ook de toestandsvergelijking van het gehele systeem worden opgeschreven. Hieronder volgen enkele voorbeelden voor systemen met één in- en één uitgang.

1. twee elementen parallel (zie fig. 12.10).

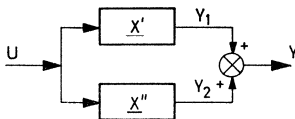


Fig. 12.10

Het eerste element wordt beschreven door :

$$\begin{aligned} \underline{x}^1(k+1) &= A_1 \underline{x}^1(k) + \underline{b}_1 u(k) \\ y_1 &= \underline{c}_1^T \underline{x}^1 + d_1 u \end{aligned}$$

en het tweede element wordt beschreven door:

$$\begin{aligned} \underline{x}^{11}(k+1) &= A_2 \underline{x}^{11}(k) + \underline{b}_2 u(k) \\ y_2 &= \underline{c}_2^T \underline{x}^{11} + d_2 u \end{aligned}$$

In dit geval geldt: $y = y_1 + y_2$

Stel $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^{11} \end{pmatrix}$ dan geldt:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} u(k) \quad (12-49)$$

$$y(k) = (\underline{c}_1^T, \underline{c}_2^T) \underline{x}(k) + (d_1 + d_2) u$$

2. twee elementen in serie (zie fig. 12.11).

Van belang is het verband tussen $u = u_1$ en $y = y_2$, bovendien geldt $y_1 = u_2$

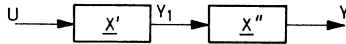


Fig. 12.11

De volgende vergelijkingen gelden in dit geval:

$$\begin{aligned} \underline{x}^1(k+1) &= A_1 \underline{x}^1(k) + \underline{b}_1 u(k) \\ \underline{x}^{11}(k+1) &= A_2 \underline{x}^{11}(k) + \underline{b}_2 y_1(k) = A_2 \underline{x}^{11}(k) + \underline{b}_2 (\underline{c}_1^T \underline{x}^1(k) + d_1 u(k)) \\ y(k) &= \underline{c}_2^T \underline{x}^{11}(k) + d_2 y_1(k) = \underline{c}_2^T \underline{x}^{11}(k) + d_2 (\underline{c}_1^T \underline{x}^1(k) + d_1 u(k)) \end{aligned}$$

Stel $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^{11} \end{pmatrix}$ dan gelden de volgende matrixvergelijkingen:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ \underline{b}_2 \underline{c}_1^T & A_2 \end{pmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 d_1 \end{pmatrix} u(k) \quad (12-50)$$

en

$$y(k) = (d_2 \underline{c}_1^T, \underline{c}_2^T) \underline{x}(k) + d_1 d_2 u(k)$$

3. teruggekoppeld systeem (zie fig. 12.12).

Er wordt aangenomen dat het element in de voorwaartse weg beschreven wordt door:

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + \underline{b}u(k) \text{ en}$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k)$$

De term $du(k)$ wordt niet meegenomen omdat dit aanleiding geeft tot fysisch niet voorkomende situaties. In de vorige situaties is d wel meegenomen omdat het mogelijk is dat er slechts diskrete elementen zijn. In dit geval wordt er van uitgegaan dat er minstens één continu element in de regelkring aanwezig is.

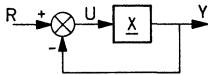


Fig. 12.12

Voor het teruggekoppelde systeem geldt:

$$u(k) = r(k) - y(k)$$

Het verband tussen $r(k)$ en $\underline{x}(k)$ wordt bepaald door $u(k)$ te elimineren:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= A\underline{x}(k) + \underline{b}r(k) - \underline{b}y(k) = A\underline{x}(k) + \underline{b}r(k) - \underline{b}\underline{c}^T \underline{x}(k) \\ &= [A - \underline{b}\underline{c}^T] \underline{x}(k) + \underline{b}r(k) \end{aligned} \quad (12-51)$$

Bovendien geldt:

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k)$$

Systemen met signaalbemonstering kunnen op dezelfde wijze beschreven worden als in de hiervoor gegeven voorbeelden met A_1 , A_2 en A respectievelijk $e^{A_1 T}$, $e^{A_2 T}$ en e^{AT} en \underline{b}_1 , \underline{b}_2 , \underline{b}_3 resp. $\underline{h}_1(T)$, $\underline{h}_2(T)$ en $\underline{h}(T)$.

Het werken met gekombineerde systemen wordt aan de hand van het volgende voorbeeld geïllustreerd.

Voorbeeld 12.6 Beschrijf het systeem volgens fig. 12.13 in toestandsvergelijkingen die het systeem beschrijven op de bemonsteringstijdstippen.

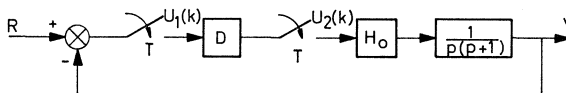


Fig. 12.13

Neem aan dat het diskrete element beschreven wordt door de toestand \underline{x}^1 en het continue element (proces voorafgegaan door een nulde orde houdschakeling) beschreven wordt door de toestand \underline{x}^{11} .

Voor het continue element wordt de volgende toestandsvergelijking gevonden

$$\underline{x}^{11}(kT+T) = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix} \underline{x}^{11}(kT) + \begin{pmatrix} T+e^{-T}-1 \\ 1-e^{-T} \end{pmatrix} u_2(kT)$$

en $y(kT) = (1, 0) \underline{x}^{11}(kT)$.

Stel dat de digitale regelaar D beschreven wordt door de volgende differentievergelijking:

$$\begin{aligned} x_0^1(kT+T) &= -a_0 x_0^1(kT) + b_1 u_1(kT) \text{ en} \\ y_1(kT) &= x_0^1(kT) + d_1 u_1(kT) \end{aligned}$$

dan geldt voor de voorwaartse weg (zie geval 2):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0^1(k+1) \\ x_1^{11}(k+1) \\ x_2^{11}(k+1) \end{pmatrix} &= \underline{x}(k+1) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ T+e^{-T}-1 & 1 & 1-e^{-T} \\ 1-e^{-T} & 0 & e^{-T} \end{pmatrix}}_A \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ (T+e^{-T}-1)d_1 \\ (1-e^{-T})d_1 \end{pmatrix}}_b u_1(k) \end{aligned}$$

en

$$y(k) = (0 \quad 1 \quad 0) \underline{x}(k)$$

Voor het teruggekoppelde systeem (zie geval 3) dient \underline{bc}^T berekend te worden

$$\underline{bc}^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ (T+e^{-T}-1)d_1 \\ (1-e^{-T})d_1 \end{pmatrix} (0 \quad 1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & (T+e^{-T}-1)d_1 & 0 \\ 0 & (1-e^{-T})d_1 & 0 \end{pmatrix}$$

zodat voor het teruggekoppelde systeem met

$$\underline{x}(k+1) = (A - \underline{bc}^T) \underline{x}(k) + \underline{br}(k) \text{ en } y = \underline{c}^T \underline{x}(k) \text{ geldt:}$$

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} -a_0 & -b_1 & 0 \\ T+e^{-T}-1 & 1-(T+e^{-T}-1)d_1 & 1-e^{-T} \\ 1-e^{-T} & -(1-e^{-T})d_1 & e^{-T} \end{pmatrix} \underline{x}(k) \\ &\quad + \begin{pmatrix} b_1 \\ (T+e^{-T}-1)d_1 \\ (1-e^{-T})d_1 \end{pmatrix} r(k) \end{aligned}$$

en

$$y(k) = (0 \quad 1 \quad 0) \underline{x}(k)$$

12.9 ENIGE VEEL VOORKOMENDE MOGELIJKHEDEN VAN TOESTANDSBESCHRIJVING

In de hiervoor beschreven systemen is niet nader ingegaan op de specifieke vorm van de A , B , C , D , e^{AT} en $H(T)$ matrices.

In feite wordt de vorm van deze matrices bepaald door de keuze van de toestandsgrootheden.

In hoofdstuk XI is ingegaan op een aantal realisatieschema's van digitale elementen. Deze realisatieschema's kan men toepassen als schema's waaruit de toestandsgrootheden volgen. Er ontstaan dan een aantal veel gebruikte configuraties voor de matrices A , B , C en D .

Er wordt uitgegaan van de overdrachtsfunctie

$$H(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n} \quad (12-52)$$

1. *Diagonaal vorm* van de matrix A . Deze vorm kan men zich ontstaan denken uit het parallel programmeringsschema in hoofdstuk XI.

Dan kan $H(z)$ ook als volgt geschreven worden:

$$H(z) = a_0 + \frac{(a_1 - b_1 a_0) z^{n-1} + (a_2 - b_2 a_0) z^{n-2} + \dots + a_n - b_n a_0}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n} \quad (12-53)$$

$$H(z) = a_0 + \frac{\alpha_1}{z - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{z - \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z - \lambda_n} \quad (12-54)$$

$$= a_0 + D_1(z) + D_2(z) + \dots + D_n(z) \quad (\text{zie fig. 12-14})$$

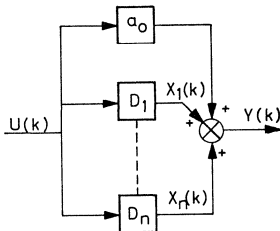


Fig. 12.14

Noem de uitgang van D_i de toestandsvariabele $x_i(k)$, dan geldt (zie fig. 12-15):

$$x_i(k+1) = \lambda_i x_i(k) + \alpha_i u(k)$$

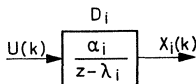


Fig. 12.15

Er geldt dus voor het totale systeem de volgende matrixvergelijking:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u(k) \quad (12-55)$$

en

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k) + a_0 u \quad \text{met} \quad \underline{c}^T = (1, 1, \dots, 1)$$

Dit is een eenvoudige beschrijvingswijze waarin alle toestandsgrootheden ontkoppeld zijn.

Het is echter nodig α_1 t/m α_n te berekenen en de polen van $D(z)$ te bepalen.

2. *Eerste kanonieke vorm* van de matrix A . Deze vorm kan men zich ontstaan denken uit het schema van de kanonieke programmering I (zie hoofdstuk XI). Voor $H(z)$ ontstaat dan de situatie zoals in fig. 12.16 is aangegeven. Door de

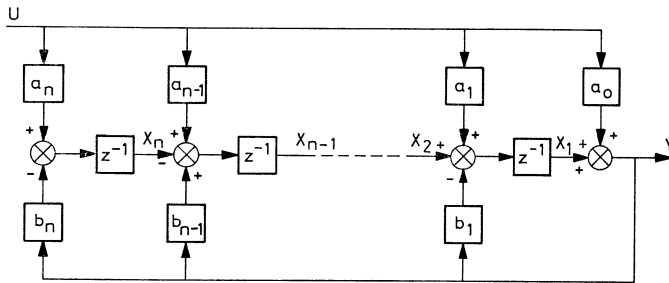


Fig. 12.16

uitgangen van de geheugenelementen te benoemen als toestandsvariabelen, ontstaan de volgende vergelijkingen die de toestand beschrijven.

$$\begin{cases} x_n(k+1) = a_n u(k) - b_n y(k) = a_n u(k) - b_n (a_0 u(k) + x_1(k)) \\ x_{n-1}(k+1) = a_{n-1} u(k) - b_{n-1} y(k) + x_n(k) \\ \quad = a_{n-1} u(k) - b_{n-1} (a_0 u(k) + x_1(k)) + x_n(k) \\ \quad \vdots \\ x_1(k+1) = a_1 u(k) - b_1 y(k) + x_2(k) \\ \quad = a_1 u(k) - b_1 (a_0 u(k) + x_1(k)) + x_2(k) \end{cases}$$

en

$$y(k) = a_0 u(k) + x_1(k)$$

of in matrixvorm:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ -b_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} a_1 - b_1 a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} - b_{n-1} a_0 \\ a_n - b_n a_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (12-56)$$

$$y(k) = (1, 0, 0, \dots) \underline{x}(k) + a_0 u(k)$$

3. *Tweede kanonieke vorm* van de matrix A . Deze vorm kan men zich ontstaan denken uit het schema van de kanonieke programmering II (zie hoofdstuk XI). Voor $H(z)$ ontstaat dan de situatie zoals in fig. 12.17 is aangegeven.

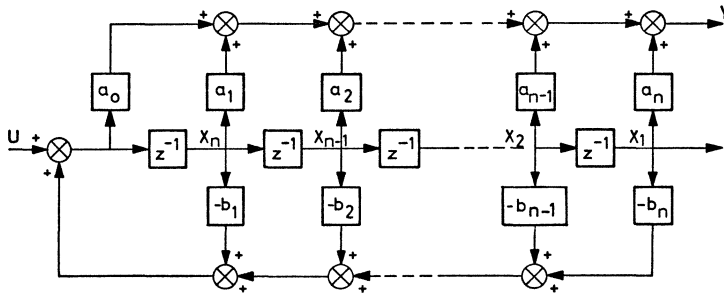


Fig. 12.17

Door de uitgangen van de geheugenelementen te benoemen als toestandsvariabelen, ontstaan de volgende vergelijkingen.

Dit schema komt overeen met de kanonieke programmering II.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = -b_n x_1(k) - b_{n-1} x_2(k) \dots - b_1 x_n(k) + u(k) \end{cases}$$

en $y(k) = a_0 u(k) + (a_n - b_n a_0) x_1(k) \dots + (a_1 - b_1 a_0) x_n(k)$

of in matrix vorm:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ -b_n & \dots & \dots & -b_2 - b_1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (12-57)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k) + a_0 u(k)$$

met $\underline{c}^T = ((a_n - b_n a_0), \dots, (a_1 - b_1 a_0))$

4. *Driehoeksmatrixvorm* van de matrix A . Deze vorm kan men zich ontstaan denken uit het schema van de serieprogrammering (zie hoofdstuk XI). Voor $H(z)$ ontstaat dan de situatie zoals in fig. 12.18 is aangegeven. Hieruit volgen de vergelijkingen:

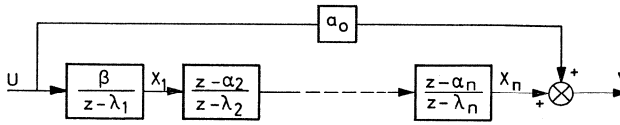


Fig. 12.18

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= \lambda_1 x_1(k) + \beta u(k) \\
 x_2(k+1) &= \lambda_2 x_2(k) + x_1(k+1) - \alpha_2 x_1(k) = \\
 &= \lambda_1 x_1(k) + \beta u(k) + \lambda_2 x_2(k) - \alpha_2 x_1(k) \\
 x_3(k+1) &= \lambda_3 x_3(k) + x_2(k+1) - \alpha_3 x_2(k) = \\
 &= \lambda_3 x_3(k) + \lambda_1 x_1(k) + \beta u(k) + \lambda_2 x_2(k) - \alpha_2 x_1(k) - \alpha_3 x_2(k) \\
 &\vdots \\
 y(k) &= x_n(k) + a_0 u(k)
 \end{aligned}$$

of in matrixvorm:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \alpha_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \alpha_2 & \lambda_2 - \alpha_3 & \lambda_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 - \alpha_2 & \lambda_2 - \alpha_3 & \lambda_3 - \alpha_3 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta \end{pmatrix} u(k) \quad (12-58)$$

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \underline{c}^T \underline{x}(k) + a_0 u(k) \\
 \text{met } \underline{c}^T &= (0, 0, \dots, 0, 1)
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 12.7

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{(z+0,5)}{(z-1)(z-0,5)z} = \frac{z+0,5}{z^3-1,5z^2+0,5z} \\
 &= \frac{z^{-2}+0,5z^{-3}}{1-1,5z^{-1}+0,5z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}
 \end{aligned}$$

1. diagonaal vorm: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0,5$ en $\lambda_3 = 0$

$$H(z) = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0,5} + \frac{A_3}{z} = \frac{3}{z-1} - \frac{4}{z-0,5} + \frac{1}{z}$$

dus:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$
$$y(k) = (1, 1, 1) \underline{x}(k)$$

2. eerste kanonieke vorm:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0,5$$

$$b_1 = -1,5, b_2 = 0,5, b_3 = 0$$

$$\underline{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} u$$
$$y = (1, 0, 0) \underline{x}(k)$$

3. tweede kanonieke vorm:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [0,5, 1, 0] \underline{x}(k)$$

4. driehoeksmatrix:

$$D(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-0,5} \cdot \frac{z+0,5}{z} \quad \text{dus} \quad a_0 = 0, \quad \beta = 1$$

$$\alpha_3 = -0,5, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,5, \quad \lambda_3 = 0$$

$$\underline{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5+0,5 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$
$$y(k) = (0 \ 0 \ 1) \underline{x}(k)$$

De voor- en nadelen van de diverse methoden liggen op het vlak van de interpreteerbaarheid (b.v. overeenkomst met de polen van het systeem of met de coëfficiënten van de differentievergelijking) en op de ingewikkeldheid van de rekenbewerkingen. Dit laatste speelt vooral een rol indien er complexe of meervoudige polen zijn (diagonaalvorm en driehoeksmatrixvorm).

12.10 REGELBAARHEID EN WAARNEEMBAARHEID

Begrippen die nauw samenhangen met de beschrijving van systemen in toestandsvergelijkingen zijn de begrippen: regelbaarheid en waarneembaarheid zoals deze door Kalman zijn gedefinieerd. Vooral in het geval een systeem meer in- en uitgangen heeft is de eenvoudigste manier om een systeem op deze eigenschappen te testen de methode m.b.v. toestandsvergelijkingen.

Regelbaarheid

Een systeem is volledig regelbaar als het mogelijk is een systeem van een willekeurige toestand $\underline{x}(0)$ naar een willekeurige toestand $\underline{x}(NT)$ te brengen in een eindig aantal bemonsteringsperioden, waarbij wordt aangenomen dat er geen beperkingen zijn in \underline{u} . Voor $\underline{x}(NT)$ kan geschreven worden:

$$\underline{x}(N) = A^N \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} B \underline{u}(i) \quad (12-59)$$

of

$$\underline{x}(NT) = (e^{AT})^N \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} (e^{AT})^{N-1-i} H(T) \underline{u}(iT) \quad (12-60)$$

Voor de afleiding van de voorwaarden voor regelbaarheid wordt slechts de eerste formule beschouwd. Door een lineaire transformatie is het mogelijk in de eis van regelbaarheid te stellen: $\underline{x}(N) = \underline{0}$, waardoor vanuit een willekeurig punt $\underline{x}(0)$ de oorsprong in een eindig aantal bemonsteringsperioden bereikt moet kunnen worden. Hiervoor ontstaat:

$$A^N \underline{x}(0) = - \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} B \underline{u}(i) \quad (12-61)$$

Vermenigvuldig (12-84) met A^{-N} dan ontstaat:

$$\underline{x}(0) = - \sum_{i=0}^{N-1} A^{-1-i} B \underline{u}(i) = - \sum_{i=0}^{N-1} F_i \underline{u}(i) \quad (12-62)$$

$$\text{met } F_i = A^{-1-i} B$$

Of in woorden: Door vanuit een begintoestand $\underline{x}(0)$ de signalen $F_i \underline{u}(i)$ toe te voeren dient $\underline{x}(N) = \underline{0}$ bereikt te worden.

$$\underline{x}(0) = F_0 \underline{u}(0) + \dots + F_{N-1} \underline{u}(N-1)$$

of

$$\underline{x}(0) = [F_0, F_1, \dots, F_{N-1}] \begin{pmatrix} \underline{u}(0) \\ \underline{u}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{u}(N-1) \end{pmatrix} \quad (12-63)$$

Voor een lineair n^{de} orde systeem kan bewezen worden dat $n = N$. Dit wil nog niet zeggen dat het nodig is van elke begintoestand in n stappen de oorsprong te bereiken. Er zijn begintoestanden denkbaar waarin dit in minder dan n stappen mogelijk is.

Voorbeeld 12.8

Gegeven de toestandsvergelijkingen:

$$\underline{x}(NT+T) = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix} \underline{x}(NT) + \begin{pmatrix} T+e^{-T}-1 \\ 1-e^{-T} \end{pmatrix} u(NT)$$

(zie ook voorbeeld 12.8).

$$y(NT) = (1 \quad 0) \underline{x}(NT)$$

Stel $T = 1$ dan geldt:

$$\underline{x}(NT+T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.632 \\ 0 & 0.368 \end{pmatrix} \underline{x}(NT) + \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{pmatrix} u(NT)$$

Het systeem is van de tweede orde, dus voor regelbaarheid moet gelden:

$$\underline{x}(0) = -\underline{f}_0(0)u(0) - \underline{f}_1 u(T)$$

$$\underline{f}_0 = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1.718 \\ 0 & 2.718 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.718 \\ -1.718 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}_1 = A^{-2}B = \begin{pmatrix} 1 & -1.718 \\ 1 & 2.718 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1.718 \\ 1 & 2.718 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.671 \\ -4.671 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt: $\underline{f}_1 \neq \alpha \underline{f}_0$ waarin α een scalar is, zodat \underline{f}_1 en \underline{f}_0 lineair onafhankelijk zijn.

In twee bemonsteringsperioden kan de oorsprong vanuit elke begintoestand bereikt worden:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.718 & 3.671 \\ -1.718 & -4.671 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}$$

Met behulp van de vektoren \underline{f}_0 en \underline{f}_1 kan ieder punt in het $x_1 - x_2$ vlak worden aangegeven (zie fig. 12.19).

Het is mogelijk de oorsprong in één bemonsteringsperiode te bereiken indien $\underline{x}(0)$ zodanig gesitueerd is dat geldt: $\underline{x}(0) = \underline{f}_0 u(0)$ of

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.718 \\ -1.718 \end{pmatrix} u(0)$$

d.w.z. $\underline{x}(0)$ moet liggen op een rechte door de oorsprong en het punt $(0.718, -1.718)$ (zie fig. 12.20)

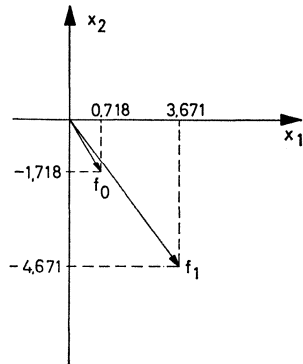


Fig. 12.19

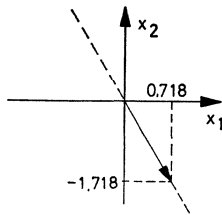


Fig. 12.20

Indien er echter begrenzings in u optreden (b.v. $|u| < 1$) is het duidelijk dat niet meer vanuit ieder punt de oorsprong bereikt kan worden. Er kan een gebied worden aangegeven waarbinnen elke begintoestand in 2 bemonsteringsperiodes naar de oorsprong geregeld kan worden.

In fig. 12.21 is dit aangegeven voor het zo juist behandelde voorbeeld.

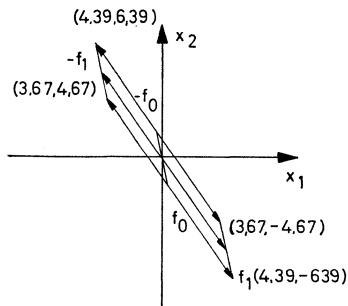


Fig. 12.21

Waarneembaarheid

Indien een systeem beschreven wordt door n toestandsvariabelen is het niet altijd mogelijk alle toestandsvariabelen te meten.

Wel zijn er één of meer uitgangen aan het systeem aanwezig en het kan wenselijk zijn de toestand uit deze beschikbare uitgangsgrootheden te reconstrueren.

Aangezien y van een lagere orde is dan x dient men x dus te bepalen uit een aantal waarden van y op de bemonsteringstijdstippen.

Het systeem wordt beschreven door:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= C\underline{x}(k) + D\underline{u}(k) \end{aligned} \quad (12-64)$$

$\underline{x}(k)$ dient bepaald te worden uit $y(k)$ terwijl $\underline{u}(k)$ en A, B, C en D bekend zijn.

Voor volledige waarneembaarheid moet het mogelijk zijn $\underline{x}(k)$ te bepalen voor elke $\underline{u}(k)$. Voor de eenvoud zal nu gesteld worden $\underline{u}(k) = \underline{0}$.

Er geldt op de tijdstippen $N, N-1, \dots$

$$\begin{aligned} \underline{y}(N) &= C\underline{x}(N) \\ \underline{y}(N-1) &= C\underline{x}(N-1) = CA^{-1}\underline{x}(N) \\ \underline{y}(N-2) &= C\underline{x}(N-2) = CA^{-2}\underline{x}(N) \\ \underline{y}(N-k) &= CA^{-k}\underline{x}(N) \end{aligned}$$

Indien $k = n-1$ wordt gekozen, waarin n de orde van het systeem is, geldt

$$\begin{pmatrix} \underline{y}(N) \\ \vdots \\ \underline{y}(N-n+1) \end{pmatrix} = (C, CA^{-1}, \dots, CA^{-n+1})^T \begin{pmatrix} x_1(N) \\ \vdots \\ x_n(N) \end{pmatrix} = G\underline{x}(N) \quad (12-65)$$

$$\text{dus: } \underline{x}(N) = G^{-1} \begin{pmatrix} \underline{y}(N) \\ \vdots \\ \underline{y}(N-n+1) \end{pmatrix}$$

met de voorwaarde dat de vektoren $C, CA^{-1}, \dots, CA^{-n+1}$ lineair onafhankelijk zijn. Hiermee kan op eenvoudige wijze worden vastgesteld of een systeem volledig waarneembaar is. Uit n waarden van de uitgang kan de totale toestand bepaald worden. De begrippen regelbaarheid en waarneembaarheid zullen in het volgende hoofdstuk worden toegepast.

In de literatuur worden voor regelbaarheid en waarneembaarheid ook wel de volgende formules afgeleid:

$$\underline{x}(NT) = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} B \underline{u}(i) = \sum_{i=0}^{N-1} F_i^1 \underline{u}(i) \quad \text{met} \quad F_i^1 = A^{N-1-i} B \quad (12-66)$$

Er wordt dan geëist dat $[A^{N-1}B, A^{N-2}B, \dots, AB, B]$ de rang n heeft opdat het systeem regelbaar is.

Voor de waarneembaarheid gaat men dan uit van het volgende stelsel

$$\begin{aligned}y(N) &= C\underline{x}(N) \\y(N+1) &= C\underline{x}(N+1) = CA\underline{x}(N) \\&\vdots \\y(N+n-1) &= C\underline{x}(N+n-1) = CA^{n-1}\underline{x}(N)\end{aligned}\tag{12-67}$$

Er wordt nu geëist dat $[C, CA, \dots, CA^{n-1}]$ de rang n heeft opdat het systeem waarneembaar is.

In dit geval wordt $\underline{x}(N)$ bepaald uit toekomstige kennis van $y(N), y(N+1), \dots, y(N+n-1)$.

Dit in tegenstelling tot de hiervoor gegeven definitie waarin $\underline{x}(N)$ bepaald wordt uit $y(N-n+1), \dots, y(N-1), y(N)$.

De begrippen regelbaarheid en waarneembaarheid zijn vooral van belang bij systemen met meer in- en uitgangen. In de theorie van de optimale regelsystemen wordt veelvuldig geëist dat de systemen deze eigenschappen bezitten.

XIII. Tijdoptimale digitale regelsystemen

13.1 INLEIDING

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op een aantal ontwerpmethoden die speciaal ontwikkeld zijn voor digitale regelsystemen. Bij het ontwerpen van regelsystemen wordt steeds meer gebruik gemaakt van optimale regelstrategieën. Men gaat hierbij uit van een kostenkriterium dat men probeert te minimaliseren. In dit kriterium kunnen de stuurgrootheden, toestandsgrootheden en de tijd voorkomen met nog te kiezen gewichtsfactoren. Het zou te ver voeren in deze monografie hierop in te gaan. Een bijzonder geval zijn echter tijdoptimale regelsystemen, waarbij in het kostenkriterium slechts de tijd voorkomt die geminimaliseerd dient te worden.

In de theorie van tijdoptimale continue lineaire systemen komt men uit op een zogenaamde bang-bang regeling, waarin het systeem gedurende bepaalde tijdsintervallen een maximaal positief of negatief stuursignaal krijgt toegevoerd. De schakeltijden (overgang van positieve naar negatieve sturing en omgekeerd) dienen nauwkeurig bekend te zijn, en volgen uit de systeemgegevens en de grootte van de ingangs- of stoorsignalen.

In dit hoofdstuk zullen systemen behandeld worden waarin de overgang van positieve naar negatieve sturing slechts op vaste tijdstippen kan plaats vinden (de bemonsteringstijdstippen). Er zal worden aangenomen dat de grootte van de stuursignalen niet begrensd is.

Er wordt uitgegaan van de volgende probleemstelling:
Ontwerp een regelaar $D(z)$ (zie fig. 13.1) zodanig dat een setpointverandering

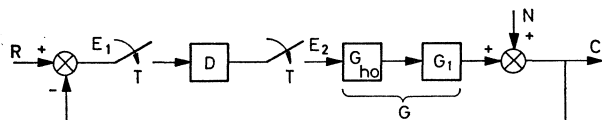


Fig. 13.1

R zo snel mogelijk wordt gevolgd door het uitgangssignaal C , of zodanig dat een stoorsignaal N zo snel mogelijk wordt weggeregeld. De sturing E_2 kan slechts op diskrete tijdstippen veranderen.

Bij de methoden die ter sprake zullen komen zal het ontwerp er op gericht zijn bepaalde eisen te stellen aan $e_1(nT)$ of $c(nT)$. Hieruit volgt dan vanzelf

de configuratie van de regelaar $D(z)$. De regelaar dient vervolgens nog getest te worden op zijn realiseerbaarheid.

Doordat men bij het ontwerp R of N dient te kennen kan men ook stellen dat het ontwerp er op gebaseerd is eisen te stellen aan de totale overdrachtsfunctie. In dit hoofdstuk wordt ingegaan op een drietal ontwerpmethoden.

1. *minimum settling time control* (m.s.t.c.)

Bij deze methode wordt geëist dat eeningangssignaal R zo snel mogelijk gevolgd wordt door het uitgangssignaal C op de bemonsteringstijdstippen, d.w.z. $c(NT) = r(NT)$ voor $t = N, N+1, \dots$ met N minimaal. De methode is ook bruikbaar indien men wenst dat een stoorsignaal N zo snel mogelijk wordt weggeregeld op de bemonsteringstijdstippen, d.w.z. $c(NT) = 0$ voor $t = N, N+1, \dots$ met N minimaal voor een gegeven stoorsignaal.

2. *ripple free response control* (r.f.r.c.)

Bij deze methode worden tevens eisen gesteld aan het signaal $c(t)$ tussen de bemonsteringstijdstippen; d.w.z. $c(t) = r(t)$ voor $t \geq NT$ met N minimaal of $c(t) = 0$ bij een gegeven stoorsignaal $n(t)$ voor $t \geq NT$ met N minimaal.

3. *toestandsterugkoppeling*

Bij deze methode wordt geëist dat een bepaalde gewenste toestand $\underline{x}_g(NT)$ van het systeem wordt bereikt vanuit een willekeurige begintoestand $\underline{x}(0)$ in een minimum aantal bemonsteringstijdstippen. Hierbij wordt er vanuit gegaan dat de toestand meetbaar is, of in ieder geval gerekonstrueerd kan worden.

13.2 MINIMUM SETTLING TIME CONTROL (m.s.t.c.)

Er wordt verondersteld dat $G(z) = Z(G_{h_0} G_1(p))$ bekend is en dat T gegeven is. Bovendien moet $R(z)$ respectievelijk $N(z)$ bekend zijn.

Er zullen eisen gesteld worden aan $E_1(z)$ of $C(z)$ maar aangezien $R(z)$ en $N(z)$ bekend zijn kan men ook stellen dat eisen worden gesteld aan de totale overdrachtsfuncties $M(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$ respectievelijk $M_1(z) = \frac{C(z)}{N(z)}$.

Hieruit wordt dan de digitale regelaar $D(z)$ bepaald.

Bij volgsystemen (setpointveranderingen) worden de volgende eisen gesteld:

1. De stationaire fout moet nul zijn, m.a.w. $\lim_{n \rightarrow \infty} e_1(nT) = 0$, maar tevens moet deze fout zo snel mogelijk nul zijn op de bemonsteringstijdstippen, m.a.w. $e_1(nT) = 0$ voor $n = N, N+1, \dots$ met N minimaal.
2. $D(z)$ moet realiseerbaar zijn, d.w.z. dat de uitgang van $D(z)$ slechts een functie van de huidige ingang en voorgaande in- en uitgangsgrootheden mag zijn.

Bij regulatorsystemen (wegregelen van storingen waarbij de setpoint konstant blijft) worden de volgende eisen gesteld:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} c(nT) = 0$, maar tevens $c(nT) = 0$ voor $n = N, N+1, \dots$ met N minimaal.
2. $D(z)$ moet realiseerbaar zijn.

In tabel XIII.1 zijn alle van belang zijnde grootheden voor deze ontwerp-methode opgenomen. Overeenkomstige grootheden voor de beide gevallen staan naast elkaar. De in dit hoofdstuk voorkomende functies van z zullen bij diverse uitwerkingen worden genoteerd als polynomen in z^{-1} , maar algemeen genoteerd blijven als functies van z .

Tabel XIII.1

volgsystemen	regulatorsystemen
$\frac{C(z)}{R(z)} = M(z) = \frac{D(z) G(z)}{1 + D(z) G(z)}$	$\frac{C(z)}{N(z)} = M_1(z) = \frac{1}{1 + D_1(z) G(z)}$
$D(z) = \frac{M(z)}{1 - M(z)} \frac{1}{G(z)}$	$D_1(z) = \frac{1 - M_1(z)}{M_1(z)} \frac{1}{G(z)}$
$E_1(z) = \frac{R(z)}{1 + D(z) G(z)} = R(z)(1 - M(z))$	$C(z) = N(z) M_1(z)$
$E_2(z) = D(z)(1 - M(z)) R(z)$	$E_2(z) = -D(z) M_1(z) N(z)$
$= M(z) R(z) \frac{1}{G(z)}$	$= -(1 - M_1(z)) N(z) \frac{1}{G(z)}$

Zoals uit deze tabel blijkt bestaat er een equivalentie tussen $M(z)$ en $1 - M_1(z)$ en tussen $E_1(z)$ en $C(z)$.

13.2.1 Volgsystemen

$$\text{Stel } G(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}} \cdot z^{-k_1} = z^{-k_1} \frac{GT(z)}{GN(z)} \quad (13-1)$$

Dit is een systeem van de n^{de} orde met een dode tijd $T_D = k_1 T$.

$$\text{Stel } R(z) = \frac{RT(z)}{RN(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_p z^{-p}}{1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_q z^{-q}} \quad (13-2)$$

uit de eerste eis volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_1(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{RT(z)}{RN(z)} (1-M(z)) = 0 \text{ indien het eindwaarde-}$$

theorema wordt toegepast.

Opdat $e_1(nT) = 0$ voor $n = N, N+1, \dots$, moet gelden dat $E_1(z)$ een eindig polynoom in z^{-1} is:

$$E_1(z) = e_1(0) + e_1(T)z^{-1} + \dots + e_1(NT)z^{-N}.$$

Aangezien $E_1(z) = \frac{RT(z)}{RN(z)} (1-M(z))$ kan dit bereikt worden door te stellen

$$1-M(z) = RN(z) \cdot F(z), \text{ zodat } E_1(z) = RT(z) \cdot F(z) \text{ met } F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} \dots + f_k z^{-k} \text{ voor } k = N-p.$$

Voor de totale overdracht $M(z)$ geldt dan:

$$M(z) = 1 - RN(z) \cdot F(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + \dots + m_N z^{-N} \quad (13-3)$$

Uit fysische overwegingen kan men stellen dat, indien $G_1(p)$ meer polen dan nulpunten heeft, $m_0 = 0$ zodat geldt: $f_0 r_0 = 1$ indien $r_0 \neq 0$.

Tenslotte geldt voor de tweede eis: de realiseerbaarheid van $D(z)$

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{M(z)}{1-M(z)} \frac{1}{G(z)} \\ &= \frac{m_1 z^{-1} + \dots + m_N z^{-N}}{1 - m_1 z^{-1} - \dots - m_N z^{-N}} z^{k_1} \cdot \frac{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} \end{aligned}$$

d.w.z.

$$\begin{aligned} D(z) &= z^{k_1} \cdot \frac{m_1 z^{-1} + (m_1 b_1 + m_2) z^{-2} + (m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_3) z^{-3} + \dots}{a_1 z^{-1} + (a_2 - m_1 a_1) z^{-2} + (a_3 - m_1 a_2 - m_2 a_1) z^{-3} + \dots} \\ &= z^{k_1} \cdot \frac{d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{N+n} z^{-N-n}}{t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \dots + t_{N+m} z^{-N-m}} \end{aligned}$$

Opdat $D(z)$ realiseerbaar is moet gelden:

$$\begin{aligned} d_1 = d_2 \dots = d_{k_1} = 0, \quad \text{zodat} \\ D(z) = \frac{d_{k_1+1} z^{-1} + \dots + d_{N+n} z^{-N-n+k_1}}{t_1 z^{-1} + \dots + t_{N+m} z^{-N-m}} \end{aligned} \quad (13-4)$$

Dit netwerk is realiseerbaar.

Uit de voorwaarden $d_1 = d_2 = \dots = d_{k_1} = 0$ volgen voorwaarden voor m_1, m_2, \dots, m_{k_1} . De gevonden voorwaarden voor $D(z)$ volgen ook uit een fysische interpretatie. Bij een dode tijd van $T_D = k_1 T$ kan de invloed van het signaal R minimaal na k_1 bemonsteringsperioden pas meetbaar zijn in het signaal C . Dit houdt dus consequenties in voor de keuze van $M(z)$ en tengevolge daarvan voor $D(z)$. Aan de eis dat N minimaal moet zijn wordt voldaan door in $M(z)$ zo weinig mogelijk termen m_i mee te nemen, of anders gesteld, door in $F(z)$ zo weinig mogelijk termen f_i mee te nemen.

Het aantal termen van $M(z)$ wordt dan alleen nog bepaald door de orde van $RN(z)$, vanwege $1 - M(z) = RN(z) \cdot F(z)$.

Voorbeeld 13.1

Stapvormig ingangssignaal, systeem zonder dode tijd maar van willekeurige orde; $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ en $k_1 = 0$

$$\text{dus: } M(z) = 1 - RN(z) F(z) = 1 - (1-z^{-1})(f_0 + f_1 z^{-1} + \dots) = \\ = (1-f_1)z^{-1} + (f_1-f_2)z^{-2} + \dots = m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots$$

omdat $r_0 = 1$ geldt immers $f_0 = 1$. Aangezien $k_1 = 0$ behoeven geen eisen gesteld te worden aan de realiseerbaarheid van $D(z)$ en kan men m_1, \dots, m_k vrij kiezen.

Bovendien geldt: $E_1(z) = RT(z) \cdot F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots$

Door te eisen $f_1 = f_2 = \dots = 0$, ontstaat een minimaal polynoom $E_1(z) = 1$ en volgt voor $M(z)$: $M(z) = z^{-1}$.

Hieruit volgt dat $M(z)$ onafhankelijk is van $G(z)$ en dus geldt $c(nT) = r(nT)$ voor $n = 1, 2, \dots$. Minimum settling time treedt op voor $N = 1$.

Voorbeeld 13.2

Stapvormig ingangssignaal, systeem van willekeurige orde maar met dode tijd $T_D = k_1 T$

$$R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{en} \quad T_D = k_1 T$$

dus $M(z) = m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots$ (zie voorbeeld 1).

Voor de realiseerbaarheid van $D(z)$ moeten eisen gesteld worden aan d_1, d_2, \dots, d_{k_1} .

Hieruit volgt: $m_1 = 0, m_1 b_1 + m_2 = 0, m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_3 = 0, \dots$

Er dient te gelden; $m_1 = m_2 = \dots = m_{k_1} = 0$, wil aan deze voorwaarden voldaan zijn.

Men kan $m_{k_1+1}, m_{k_1+2}, \dots$ vrij kiezen. Kies in overeenstemming met het voorgaande voorbeeld $m_{k_1+1} = 1$ en $m_{k_1+2} = m_{k_1+3} = \dots = 0$,

zodat $M(z) = z^{-k_1-1}$. Ook nu is $M(z)$ onafhankelijk van $G(z)$ en dus geldt: $c(nT) = r(nT)$ voor $n = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots$.

Voorbeeld 13.3

Eenparig met de tijd toenemend ingangssignaal, systeem van willekeurige orde maar zonder dode tijd.

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad \text{en} \quad k_1 = 0$$

Er behoeven geen eisen gesteld te worden aan m_1, m_2, \dots voor de realiseerbaarheid van $D(z)$ aangezien $k_1 = 0$

$$M(z) = 1 - RN(z) F(z) = 1 - (1 - z^{-1})^2 (f_0 + f_1 z^{-1} + \dots) = m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots$$

Bovendien geldt: $E_1(z) = RT(z) F(z) = Tz^{-1}(f_0 + f_1 z^{-1} + \dots)$.

Opdat $E_1(z)$ een minimaal polynoom is moet $f_1 = f_2 = \dots = 0$ gesteld worden.

Bovendien moet gelden $f_0 = 1$ opdat aan de voorwaarde voor $M(z)$ wordt voldaan.

Er geldt dan: $M(z) = 1 - (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) = m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2}$, dus $m_1 = 2$ en $m_2 = -1$.

Voorbeeld 13.4

Stel $R(z) = \frac{1}{4} \frac{(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})}{1 - z^{-1}}$, dit is een taludfunctie (zie fig. 13.2a).

Stel dat het systeem geen dode tijd heeft dus $k_1 = 0$, maar van willekeurige orde is.

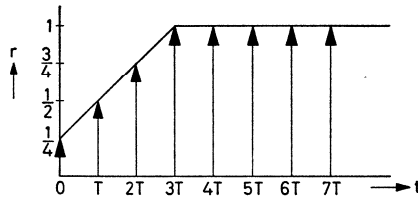


Fig. 13.2a

$$M(z) = 1 - (1 - z^{-1})(f_0 + f_1 z^{-1} + \dots) = m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots$$

Er behoeven geen eisen gesteld te worden aan de realiseerbaarheid van $D(z)$, dus m_1, m_2, \dots kunnen vrij gekozen worden.

$$E_1(z) = RT(z) F(z) = \frac{1}{4} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})(f_0 + f_1 z^{-1} + \dots)$$

Opdat $E_1(z)$ een minimaal polynoom is moet $f_1 = f_2 = \dots = 0$ gekozen worden.

Bovendien moet weer gelden $f_0 = 1$, zodat $m_1 = 1$. Voor $C(z)$ wordt gevonden:

$$C(z) = z^{-1} \frac{1}{4} \frac{(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})}{1 - z^{-1}} \quad (\text{zie fig. 13-2b})$$

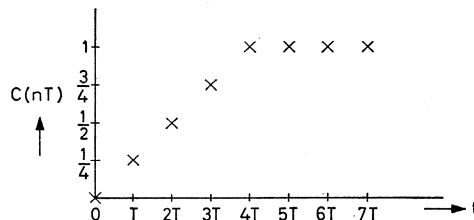


Fig. 13.2b

13.2.2 Regulateursystemen

Zoals reeds is aangegeven in tabel XIII.1 bestaat er een equivalentie tussen de grootheden $M_1(z)$ en $1 - M(z)$ en tussen $C(z)$ en $E_1(z)$.

Voor regulateursystemen kunnen dus dezelfde voorwaarden worden afgeleid als in de voorgaande paragraaf indien voor $R(z)$, $M(z)$ en $E_1(z)$ resp. $N(z)$, $1 - M_1(z)$ en $C(z)$ wordt gelezen. Stel $N(z) = \frac{NT(z)}{NN(z)}$.

Wat betreft de realiseerbaarheid van $D(z)$ geldt:

$$D_1(z) = \frac{1 - M_1(z)}{M_1(z)} \frac{1}{G(z)} = \frac{1 - m_{10} - m_{11}z^{-1} - \dots}{m_{10} + m_{11}z^{-1} + \dots} \times \\ \times \frac{1 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}} z^{k_1}$$

Bovendien geldt: $M_1(z) = \frac{1}{1 + D_1(z)G(z)}$ waarin $D_1(z)G(z) = \frac{1 - M_1(z)}{M_1(z)}$.

Uit het oogpunt van fysische realiseerbaarheid moet gelden

$$D_1(z)G(z) = \alpha_1z^{-1} + \alpha_2z^{-2} + \dots, \text{ zodat } m_{10} = 1.$$

Er geldt dus

$$D_1(z) = \frac{z^{k_1}(d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + \dots)}{t_1z^{-1} + t_2z^{-2} + \dots} \text{ zodat dezelfde voorwaarden als in de vorige}$$

paragraaf aan $D_1(z)$ moeten worden gesteld.

Voorbeeld 13.5

Stel $N(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = Z\left(\frac{1}{p+a}\right)$ en stel dat het systeem geen dode tijd

heeft, dus $k_1 = 0$.

Er geldt dan:

$$1 - M_1(z) = 1 - NN(z)F(z) = 1 - (1 - e^{-aT}z^{-1})(f_0 + f_1z^{-1} + \dots) = \\ = m_{11}z^{-1} + m_{12}z^{-2} + \dots$$

Kies $f_0 = 1$ en $f_1 = f_2 = \dots = 0$ dan geldt: $m_{11} = e^{-aT}$ en $m_{12} = m_{13} = \dots = 0$.

Voorbeeld 13.6

Stel $N(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ en het systeem heeft een dode tijd $T_D = k_1T$.

Voor realiseerbaarheid van $D(z)$ moet gelden:

$$m_{11} = 0, m_{11}b_1 + m_{12} = 0 \text{ dus } m_{12} = 0, \text{ enzovoort.}$$

Er dient dus te gelden $m_{11} = m_{12} = \dots = m_{1k_1} = 0$.

Door $m_{1k+1} = 1$ te kiezen ontstaat: $M_1(z) = 1 - z^{-k_1-1}$.

13.2.3 Systemen met polen en of nulpunten buiten de eenheidscirkel.
Ringling effect.

Een probleem doet zich voor indien $G(z)$ polen en/of nulpunten buiten de eenheidscirkel heeft. Vooral bij systemen met een dode tijd die niet een geheel aantal malen de bemonsteringstijd is, zullen er nulpunten buiten de eenheidscirkel kunnen ontstaan. Deze nulpunten worden polen van $D(z)$. Omdat de nulpunten van $G(z)$ niet precies wegvallen tegen de polen van $D(z)$ ontstaan er in het teruggekoppelde systeem polen buiten de eenheidscirkel. Hierdoor ontstaat een instabiel systeem. Een oplossing hiervoor is de nulpunten van $G(z)$ die buiten de eenheidscirkel liggen, op te nemen in $M(z)$ resp. $1 - M_1(z)$.

In $D(z)$ komen immers niet de werkelijke polen en nulpunten van $G(z)$ voor maar de voor het ontwerp geschatte waarden van de polen en nulpunten. Door de buiten de eenheidscirkel liggende nulpunten op te nemen in $M(z)$ resp. $1 - M_1(z)$ vallen deze factoren geheel uit $D(z)$.

Een soortgelijk geval doet zich voor indien $G(z)$ polen heeft die buiten de eenheidscirkel liggen (het open systeem is instabiel). Door deze polen op te nemen in $1 - M(z)$ resp. $M_1(z)$ verdwijnen deze als factor uit $D(z)$ en ontstaat er geen pool buiten de eenheidscirkel t.g.v. het niet precies tegen elkaar wegvallen van polen en nulpunten. Bij de z -transformatie van systemen voorafgegaan door een houdschakeling ontstaan nulpunten in het linker halfvlak van z die meestal binnen de eenheidscirkel liggen. Deze nulpunten worden polen in $D(z)$. Aangezien $E_2(z) = D(z) E_1(z)$ en $E_1(z)$ een impulsvormig karakter heeft, zal het signaal $e_2(nT)$ een uitstervende oscillatie vertonen waarvan de frekwentie $\frac{\omega_2}{2}$ bedraagt.

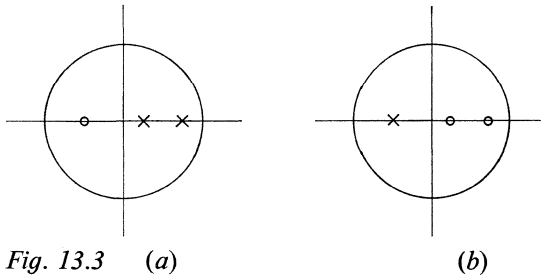


Fig. 13.3 (a) In fig. 13.3a is een polen- en nulpuntenbeeld van $G(z)$ gegeven. In fig. 13.3b is het deel van het polen- en nulpuntenbeeld gegeven van $D(z)$, dat afkomstig is van $\frac{1}{G(z)}$. De pool veroorzaakt de oscillatie in het overgangverschijnsel van e_2 . Aangezien het oscillerende signaal $e_2(nT)$ wordt doorgegeven aan de houdschakeling wordt het proces $G_1(p)$ geregeld door een oscillerend signaal en dit geeft een oscillerend uitgangssignaal dat weliswaar gedempt is en op de bemonsteringstijdstippen de gewenste waarden heeft. Het inherent

optredende oscillerende verschijnsel van $e_2(nT)$ noemt men het ringing effect. Naarmate de bemonsteringstijd groter wordt gekozen zullen de nulpunten dichterbij de oorsprong komen te liggen en zal de oscillatie laag frekwenter zijn en een grotere demping vertonen.

Het feit dat er een oscillatie tussen de bemonsteringstijdstippen (inter-sampling ripple) ontstaat, kan als volgt worden aangetoond:

$$C(z, m) = G(z, m) D(z) E_1(z)$$

$$\text{Indien } G(z) = \frac{GT(z)}{GN(z)} \text{ geldt: } G(z, m) = \frac{GT(z, m)}{zGN(z)}$$

$$\text{Tevens geldt: } D(z) = \frac{M(z)}{1-M(z)} \frac{1}{G(z)} \quad \text{en} \quad E_1(z) = R(z)(1-M(z))$$

zodat voor $C(z, m)$ geschreven kan worden:

$$\begin{aligned} C(z, m) &= \frac{GT(z, m)}{zGN(z)} \cdot \frac{M(z)}{1-M(z)} \frac{GN(z)}{GT(z)} \cdot (1-M(z))R(z) \\ &= \frac{R(z)M(z)GT(z, m)}{zGT(z)} = M(z, m)R(z) \end{aligned} \quad (13-5)$$

$$\text{met } M(z, m) = \frac{M(z)GT(z, m)}{zGT(z)}$$

Hieruit blijkt dat $M(z, m)$ in het algemeen geen eindig polynoom in z^{-1} is. Slechts in uitzonderingsgevallen kan aangetoond worden dat $c(t) = r(t)$ voor $t > NT$, bijvoorbeeld indien $R(z, m) = R(z)$ en $GT(z) = \text{konstant}$ of $GT(z, m) = GT(z)$. Een voorbeeld waarbij deze situatie zich voordoet is een proces met alleen dode tijd:

$$G_1(p) = Ke^{-pT_D} \quad \text{en} \quad R(p) = \frac{1}{p}$$

of een proces met één tijdskonstante:

$$G_1(p) = \frac{K}{p\tau + 1} \quad \text{en} \quad R(p) = \frac{1}{p}$$

13.2.4 Uitgewerkt voorbeeld

Gegeven een systeem volgens fig. 13.1 met $G_1(p) = \frac{e^{-pT_D}}{p(p+1)}$ en $T = 1$ sec.

Ontwerp $D(z)$ volgens de m.s.t.c. methode voor dit systeem, voor de hieronder volgende gevallen:

1. Er wordt op het systeem een stap gezet $R(p) = \frac{1}{p}$ en $N(p) = 0$ terwijl $T_D = 0$. Er geldt dan:

$$G(z) = Z \{G_{h0} G_1(p)\} = \frac{0,368 z^{-1} + 0,264 z^{-2}}{1 - 1,368 z^{-1} + 0,368 z^{-2}}$$

$$= \frac{0,368 z^{-1} + 0,264 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368 z^{-1})}$$

Tevens geldt $M(z) = z^{-1}$.

$$\text{Hieruit volgt: } D(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0,368 z^{-1})}{(0,368 z^{-1} + 0,264 z^{-2})} = \frac{1 - 0,368 z^{-1}}{0,368 + 0,264 z^{-1}}$$

$$E_1(z) = R(z)(1 - M(z)) = \frac{1}{(1 - z^{-1})} (1 - z^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow \{e_1(nT)\} = \{1, 0, 0 \dots\}$$

$$E_2(z) = D(z) E_1(z) = \frac{1 - 0,368 z^{-1}}{0,368 + 0,264 z^{-1}}$$

$$\{e_2(nT)\} = \{2.717, -2.948, 2.111, -1.513, 1.080 \dots\}$$

(zie fig. 13.4, waarin c en e_2 (na de houdschakeling) gestippeld zijn weer-gegeven).

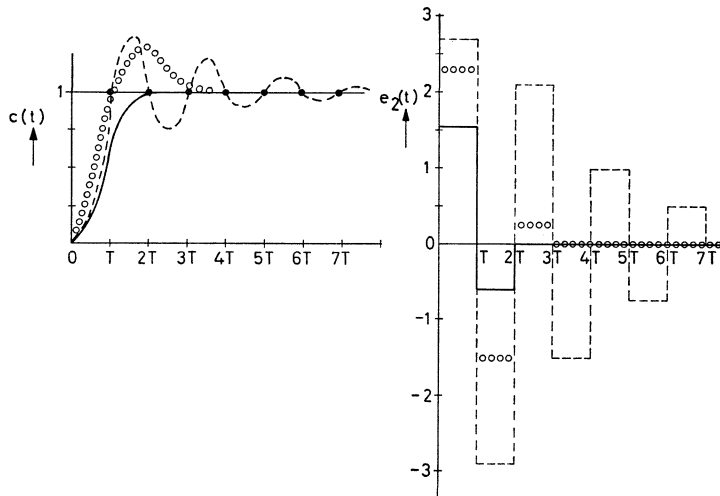


Fig. 13.4

2. Er wordt op het systeem een stap gezet $R(p) = \frac{1}{p}$ en $N(p) = 0$, terwijl $T_D = \frac{2}{7}$ sec. Er geldt dan:

$$G(z) = \frac{0,204(1 + 0,042 z^{-1})(1 + 1,917 z^{-1}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368 z^{-1})}$$

Er ligt een nulpunt buiten de eenheidscirkel. Dit nulpunt moet dus opgenomen worden in $M(z)$:

$$M(z) = z^{-1}(1 + 1,947z^{-1})m_1$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})(1 + f_1z^{-1})$$

Hieruit volgt $m_1 = 0,34$ en $f_1 = 0,66$ zodat voor $D(z)$ volgt:

$$D(z) = \frac{0,34z^{-1}(1 + 1,947z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0,66z^{-1})} \cdot \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-2})}{0,204z^{-1}(1 + 0,042z^{-1})(1 + 1,947)}$$

$$= \frac{1,666(1 - 0,368z^{-1})}{(1 + 0,667z^{-1})(1 + 0,042z^{-1})}$$

$$E_1(z) = R(z)(1 - M(z)) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}(1 - z^{-1})(1 + 0,667z^{-1})$$

$$\Rightarrow \{e_1(nT)\} = \{1, 0,667, 0, \dots\}$$

$$E_2(z) = D(z)E_1(z) = \frac{1,666(1 - 0,368z^{-1})}{(1 + 0,667z^{-1})(1 + 0,42z^{-1})} \cdot (1 + 0,667z^{-1})$$

$$\Rightarrow \{e_2(nT)\} = \{1,667, 0,544, 0,053, \dots\}$$

(zie fig. 13.5, waarin e_2 en c gestippeld zijn weergegeven).

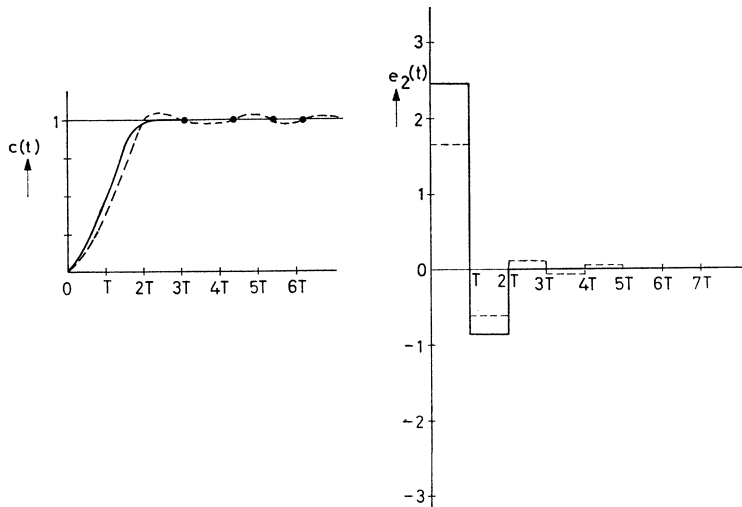


Fig. 13.5

3. Er wordt op het systeem een storing gezet met $N(p) = \frac{1}{p+a}$ en $R(p) = 0$ terwijl $T_D = 0$. Er geldt dan:

$$M_1(z) = 1 - e^{-a}z^{-1} \quad \text{en} \quad 1 - M_1(z) = e^{-a}z^{-1}$$

$$\text{Dus } D(z) = \frac{e^{-a} z^{-1}}{1 - e^{-a} z^{-1}} \cdot \frac{(1 - z^{-1})(-0,368 z^{-1})}{0,368 z^{-1} + 0,264 z^{-2}}$$

$$E_1(z) = -C(z) = -N(z)M_1(z) = \frac{-1}{(1 - e^{-a} z^{-1})} (1 - e^{-a} z^{-1}) = -1$$

$$\Rightarrow \{e_1(nT)\} = \{-1, 0, 0, \dots\}$$

$$E_2(z) = D(z)E_1(z) = -D(z)$$

$$\text{Indien } a = 1 \text{ geldt: } D(z) = \frac{0,368(1 - z^{-1})}{(0,368 + 0,264 z^{-1})}$$

zodat $\{-e_2(nT)\} = \{1, -1,717, +1,231, -0,882, +0,632, -0,435, \dots\}$ (zie fig. 13.6, waarin e_2 en c gestippeld zijn weergegeven).

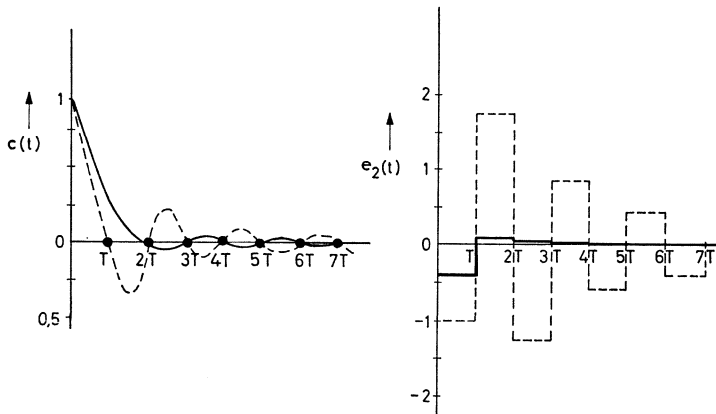


Fig. 13.6

13.2.5 Konklusies minimum settling time control

1. Het minimum aantal bemonsteringstijdstippen, N , waarin de gewenste responsie wordt bereikt op de bemonsteringstijdstippen is:
 - a. onafhankelijk van de orde n van het proces $G_1(p)$.
 - b. afhankelijk van de dode tijd $T_D = k_1 T$ van het proces. Indien de dode tijd niet een geheel aantal malen de bemonsteringstijd is zal N in het algemeen ook toenemen (zie punt 1 d).
 - c. afhankelijk van het type ingangssignaal R resp. stoorsignaal N . De hoogste macht k_2 in z^{-1} van de teller of noemer van R of N is mede bepalend voor het aantal bemonsteringstijdstippen.
 - d. afhankelijk van het aantal polen en/of nulpunten van $G(z)$ dat buiten de eenheidscirkel ligt. Stel dat dit aantal k_3 bedraagt.

Algemeen geldt dan voor het minimum aantal bemonsteringstijdstippen:

$$N = k_1 + k_2 + k_3.$$

2. Er ontstaat tussen de bemonsteringstijdstippen een zeker oscillerend verschijnsel in het signaal $c(t)$ (intersampling ripple).
3. Het stuursignaal $e_2(nT)$ zal een ringing effect vertonen, hetgeen nadelig is bij de besturing van bijvoorbeeld een klep (slijtage).
4. Het ontwerp is gevoelig voor variaties in de parameters omdat het ontwerp er op berust dat polen en nulpunten tegen elkaar wegvallen. [13.1]
5. Het ontwerp is onafhankelijk van de bemonsteringstijd T en de grootte van het ingangssignaal resp. stoorsignaal.

In een werkelijk systeem wordt het stuursignaal begrensd (verzadigingsverschijnselen) zodat T niet te klein gekozen mag worden.

6. De ontworpen regelaar $D(z)$ werkt slechts optimaal voor een bepaalde klasse van ingangs- en stoorsignalen omdat bij de keuze van $M(z)$ resp. $M^1(z)$ rekening wordt gehouden met $R(z)$ resp. $N(z)$.

Wel kan gesteld worden dat $c(nT)$ ontworpen voor een $R(z)$ resp. $N(z)$ van hogere orde, voor een $R(z)$ en $N(z)$ van lagere orde in z^{-1} , ook een tijdoptimaal karakter vertoont, zij het minder snel.

13.3 RIPPLE FREE RESPONSE CONTROL (R.F.R.C.)

Bij deze ontwerpmethode worden naast de eisen die gesteld zijn bij de m.s.t.c. tevens eisen gesteld aan de signalen tussen de bemonsteringstijdstippen, en wel dient voor volgsystemen te gelden: $c(t) = r(t)$ voor $t > NT$ en voor reguleer systemen $c(t) = 0$ voor $t > NT$ waarbij N minimaal moet zijn.

Bij deze ontwerpmethode dient dus $C(z, m)$ nader onderzocht te worden. De hier gestelde eisen kunnen vervuld worden voor bepaalde typen ingangssignalen.

13.3.1 Volgsystemen

Kies voor volgsystemen:

$D(z) = \frac{M^1(z)}{1 - M^1(z)} \frac{1}{G(z)}$ met $M^1(z) = m_0 M(z) GT(z)$, waarin $M(z)$ de overdrachtsfunctie is die gevonden werd voor m.s.t.c. en m_0 een konstante is.

Er geldt dan:

$$D(z) = \frac{m_0 M(z) GT(z)}{1 - m_0 M(z) GT(z)} \frac{GN(z)}{GT(z)} = \frac{m_0 M(z) GN(z)}{1 - m_0 M(z) GT(z)}$$

Voor $C(z, m)$ kan geschreven worden:

$$\begin{aligned} C(z, m) &= G(z, m) D(z) E_1(z) \\ &= \frac{GT(z, m) m_0 M(z) GN(z)}{zGN(z) \{1 - m_0 M(z) GT(z)\}} \{1 - m_0 M(z) GT(z)\} \cdot R(z) \end{aligned}$$

$$= GT(z, m) m_0 M(z) R(z) z^{-1} = M^1(z, m) R(z)$$

met $M^1(z, m) = GT(z, m) m_0 M(z) \cdot z^{-1}$

Hieruit blijkt dus dat $M^1(z, m)$ een eindig polynoom in z^{-1} is. Er moet nog bewezen worden dat na een zeker tijdstip $t = NT$ geldt:

$$C(z, m) = R(z, m)$$

$$\text{Stel } R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

en $GT(z, m) m_0 M(z) z^{-1} = g_{0m} + g_{1m} z^{-1} \dots + g_{Nm} z^{-N}$
dan geldt:

$$C(z, m) = g_{0m} + (g_{0m} + g_{1m}) z^{-1} + \dots + (z^{-N} + z^{-N-1} + \dots) \sum_{i=0}^N g_{im}$$

d.w.z. vanaf een zeker tijdstip, bepaald door N is $c(nT+mT)$ konstant en slechts afhankelijk van m .

Er geldt echter tevens:

$$GT(z, m) m_0 M(z) z^{-1} = \sum_{i=0}^N g_{im} z^{-i}$$

zodat voor $z = 1$ geldt:

$$m_0 GT(1, m) M(1) = \sum_{i=0}^N g_{im} \quad (13-6)$$

Bewezen kan worden [13.2] dat geldt:

$$GT(1, m) = GT(1, 0) = GT(z) \Big|_{z=1}$$

zodat $\sum_{i=0}^N g_{im} = \text{konstant}$ en dus onafhankelijk van m .

Hiermee is voor een stapvormig ingangssignaal bewezen dat na een zeker tijdstip een uitgangssignaal $c(t)$ ontstaat dat het ingangssignaal exakt volgt. Dit kan ook bewezen worden voor ingangssignalen van de vorm $r(t) = t^{k_2} U(t)$. Nu bewezen is dat het mogelijk is een $D(z)$ te ontwerpen zodanig dat $c(t) = r(t)$ na eindige tijd, is de volgende stap de bepaling van $M^1(z)$.

Bij de m.s.t.c. is aangetoond dat in ieder geval moet gelden:

$1 - M^1(z) = RN(z) F(z)$ waarin $F(z)$ een eindig polynoom in z^{-1} is, opdat het uitgangssignaal het ingangssignaal op de bemonsteringstijdstippen volgt.

Bovendien is aangetoond in de voorgaande afleiding dat moet gelden:

$$M^1(z) = m_0 M(z) GT(z)$$

Uit deze twee vergelijkingen moet $M^1(z)$ worden opgelost.

Indien $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ moet $M^1(z)$ dus bepaald worden uit

$$1 - M^1(z) = (1 - z^{-1})(1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots) \quad (13-7)$$

$$M^1(z) = m_0 z^{-k_1 - 1} (1 + z_0 z^{-1})(1 + z_1 z^{-1})(\dots) \quad (13-8)$$

waarin z_0, z_1, \dots de nulpunten van $G(z)$ zijn en k_1 volgt uit $T_D = k_1 T$, de dode tijd van het systeem.

Voorbeeld 13.7

Stel $G(z) = \frac{(z+z_0)}{(z+p_1)(z+p_2)}$ en $R(z) = \frac{z}{z-1}$ dan geldt:

$$1 - M^1(z) = (1 - z^{-1})(1 + f_1 z^{-1})$$

$$M^1(z) = m_0 z^{-1} (1 + z_0 z^{-1})$$

Hieruit volgt: $f_1 - 1 = m_0$ en $-f_1 = m_0 z_0$ of $m_0 = \frac{-1}{1+z_0}$.

Uiteindelijk is men slechts geïnteresseerd in de waarde m_0 omdat daarmee $M^1(z)$ vast ligt.

Voor systemen van de n^{de} orde zal m_0 op de hierboven beschreven wijze bepaald moeten worden uit n vergelijkingen met n onbekenden: $m_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$. Men kan m_0 echter ook als volgt direkt bepalen:

$$\begin{aligned} c(kT) &= \frac{1}{2\pi j} \oint M^1(z) R(z) z^{k-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint m_0 z^{-1} \sum_{i=0}^{n-2} (1 + z_i z^{-1}) \cdot R(z) z^{k-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint m_0 \sum_{i=0}^{n-2} (z + z_i) \frac{1}{z-1} z^{k-1-n+1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint m_0 \sum_{i=0}^{n-2} (z + z_i) \frac{z^{k-n}}{z-1} dz \end{aligned}$$

Indien geëist wordt $c(kT) = r(kT)$ voor $k = n, n+1, \dots$ geldt:

$$c(kT) = \text{Res}_{z=1} \left\{ m_0 \sum_{i=0}^{n-2} (z + z_i) z^{k-n} \right\} = 1 \quad \text{voor} \quad k \geq n$$

$$\text{d.w.z. } m_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-2} (1 + z_i)} \tag{13-9}$$

13.3.2 *Regulateursystemen*

Uitgaande van tabel XIII.1 kan gesteld worden:

$$C(z, m) = -G(z, m) D(z) C(z) + N(z, m)$$

verder geldt: $D(z) = \frac{1 - M_1^1(z)}{M_1^1(z)} \frac{1}{G(z)}$ en $C(z) = N(z) M_1^1(z)$

(zie tabel XIII.1) waarbij $M_1^1(z)$ nog nader gedefinieerd moet worden, maar in $M_1^1(z)$ is opgenomen $M_1(z)$. Er geldt dan:

$$\begin{aligned} C(z, m) &= - \frac{GT(z, m)}{zGN(z)} \cdot \frac{1 - M_1^1(z)}{M_1^1(z)} \frac{GN(z)}{GT(z)} N(z) M_1^1(z) + N(z, m) \\ &= - \frac{GT(z, m)(1 - M_1^1(z))N(z)}{GT(z)} z^{-1} + N(z, m) \end{aligned}$$

Stel $1 - M_1^1(z) = m_0(1 - M_1(z)) GT(z)$ dan geldt:

$$C(z, m) = N(z, m) - N(z) GT(z, m) \cdot m_0(1 - M_1(z))z^{-1} \quad (13-10)$$

Hieruit blijkt dat slechts in een aantal gevallen $C(z, m)$ een eindig polynoom in z^{-1} is, vanwege de termen $N(z)$ en $N(z, m)$.

De voorwaarden voor een r.f.r.c. gelden wel voor een stapvormige verstoring. Er geldt dan:

$$N(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{en} \quad N(z, m) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Stel:

$$z^{-1} GT(z, m)(1 - M_1(z))m_0 = g_{0m} + g_{1m}z^{-1} + \dots + g_{Nm}z^{-N} \text{ dan geldt:}$$

$$\begin{aligned} C(z, m) &= 1 + (1 - g_{0m})z^{-1} + (1 - g_{0m} - g_{1m})z^{-2} + \dots \left\{ 1 - \sum_{i=0}^N g_{im} \right\} \times \\ &\quad \times \{ z^{-N} + z^{-N-1} + \dots \} \end{aligned}$$

Er geldt: $GT(z, m)m_0(1 - M_1(z)) = \sum_{i=0}^N g_{im}z^{-i}$ zodat voor $z = 1$ geldt:

$$m_0(1 - M_1(z))GT(1, m) = \sum_{i=0}^N g_{im} = m_0(1 - M_1(z))GT(z) \Big|_{z=1}$$

dus $\sum_{i=1}^N g_{im}$ is onafhankelijk van m .

Hiermee is bewezen dat een stapvormig stoorsignaal $n(t)$ na een eindige tijd wordt weggeregeld, ook tussen de bemonsteringstijdstippen.

De berekening $M_1^1(z)$ gaat op identieke wijze als bij volgsystemen.

Bij de m.s.t.c. is aangetoond dat moet gelden:

$M_1^1(z) = NN(z)F(z)$ waarin $F(z)$ een eindig polynoom in z^{-1} is en $NN(z)$ het noemerpolynoom van $N(z)$ is. Bovendien moet in het geval van r.f.r.c. nog gelden: $1 - M_1^1(z) = m_0(1 - M_1(z))GT(z)$.

Indien $N(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ geldt: $M_1(z) = 1 - z^{-1}$.

Het is eenvoudig de onbekende parameter m_0 te bepalen zoals in paragraaf 13.3.1 reeds is gedaan.

$$\text{Er geldt in dit geval } m_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-2} (1+z_i)} \quad (13-11)$$

Indien het stoorsignaal een meer algemene vorm heeft is het slechts bij hoge uitzondering mogelijk te bereiken dat $c(t) = 0$ voor $t > NT$.

Er geldt algemeen:

$$C(z, m) = N(z, m) - N(z) GT(z, m) m_0 (1 - M_1) z^{-1}$$

Voor $t > NT$ moet dan gelden:

$$N(z, m) = N(z) GT(z, m) m_0 (1 - M_1(z)) z^{-1} \quad (13-12)$$

Voor een eerste orde systeem en een stoorsignaal $n(t) = e^{-at}$ zal afgeleid worden waaraan het systeem moet voldoen opdat $c(t) = 0$ na $t = T$.

$$\text{Stel } N(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \text{ dus } N(z, m) = \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$$

$$\text{en stel } G_1(p) = \frac{1}{p + b} \Rightarrow G(z) = Z(G_{h_0}(p) G_1(p)) = \frac{1 - e^{-bT}}{z - e^{-bT}}$$

$$\text{en } G(z, m) = \frac{z(1 - e^{-bmT}) + (e^{-bmT} - e^{-bT})}{z - e^{-bT}}$$

Er geldt: (zie paragraaf 13.2.4) $M_1(z) = 1 - e^{-aT} z^{-1}$ zodat de voorwaarde voor r.f.r.c. wordt:

$$e^{-amT} (z^{-1} + e^{-aT} z^{-2} + \dots) = m_0 e^{-aT} z^{-2} \cdot \{z(1 - e^{-bmT}) + (e^{-bmT} - e^{-bT})\} \{1 + e^{-bT} z^{-1} + e^{-2bT} z^{-2} + \dots\}$$

$$\text{Er geldt } m_0 = \frac{1}{1 - e^{-bT}}.$$

Voor $N = 2$ zou nu moeten gelden dat de coëfficiënt van z^{-2} van het linker- en rechterlid gelijk zijn.

Dus

$$e^{-amT} e^{-aT} = \frac{1}{1 - e^{-bT}} e^{-aT} \{(1 - e^{-bmT}) e^{-bT} + (e^{-bmT} - e^{-bT})\}$$

Hieruit volgt:

$$e^{-amT} = \frac{1}{1 - e^{-bT}} e^{-bmT} (1 - e^{-bT}) = e^{-bmT}$$

Dit geldt: indien $a = b$ m.a.w. een r.f.r.c. wordt bereikt indien de tijdconstante van het systeem gelijk is aan de tijdconstante van het aangeboden stoor-

signaal. Het blokschema kan men dan voor dit geval ook anders tekenen (zie fig. 13.7)

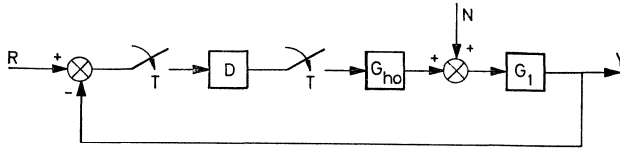


Fig. 13.7

waarin N een pulsvormige verstoring is.

Algemeen kan men de invloed van ruis op een systeem voorstellen als witte ruis die door een vormend filter $G_N(p)$ het systeem binnenkomt.

Er kan alleen van een r.f.r.c. worden gesproken als het vormend filter $G_N(p)$ gelijk is aan de overdrachtsfunctie $G_1(p)$, of anders gezegd: als witte ruis wordt toegevoerd aan de ingang van het proces.

Naar aanleiding van de hier gevonden resultaten kan men dezelfde opmerking maken t.a.v. volgsystemen.

Daarvoor geldt: $C(z, m) = GT(z, m)m_0 M(z) R(z)z^{-1}$

Opdat na een zeker tijdsinterval $C(z, m) = R(z, m)$ moet gelden:

$R(z, m) = GT(z, m)m_0 M(z) R(z)z^{-1}$ voor $t > NT$. Dit is mogelijk indien

$$R(p) = \frac{G_1(p)}{p}.$$

13.3.3 Uitgewerkt voorbeeld

Gegeven een systeem volgens fig. 13.1 met $G_1(p) = \frac{e^{-pT_D}}{p(p+1)}$ en $T=1$ sec. Ontwerp volgens de r.f.r.c. methode regelaars $D(z)$ voor dit systeem.

1. Er wordt op het systeem een stap gezet $R(p) = \frac{1}{p}$ en $N(p) = 0$ terwijl $T_D = 0$. Er geldt dan:

$$G(z) = \frac{0,368(1+0,717z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0,368z^{-1})}$$

Tevens geldt:

$$M^1(z) = m_0 z^{-1}(1+0,717z^{-1})$$

$$\text{en } m_0 = \frac{1}{1+0,717} = 0,582$$

$$1 - M^1(z) = (1-z^{-1})(1+0,417z^{-1})$$

$$\begin{aligned} \text{Hieruit volgt: } D(z) &= \frac{0,582z^{-1}(1+0,717z^{-1})(1-z^{-1})(1-0,368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0,417z^{-1})0,368(1+0,717z^{-1})z^{-1}} \\ &= \frac{1,58(1-0,368z^{-1})}{1+0,417z^{-1}} \end{aligned}$$

$$E_1(z) = R(z)(1-M^1(z)) = \frac{1}{(1-z^{-1})} (1-z^{-1})(1+0,417z^{-1})$$

$$\Rightarrow \{e_1(nT)\} = \{1, 0,417, 0, 0 \dots\}$$

$$E_2(z) = E_1(z)D(z) = (1+0,417z^{-1})1,58 \frac{(1-0,368z^{-1})}{1+0,417z^{-1}}$$

$$\{e_2(nT)\} = \{1,58, -0,58, 0, 0, \dots\}$$

(zie fig. 13.4, c en e_2 zijn volgetrokken aangegeven).

2. Er wordt op het systeem een stap gezet $R(z) = \frac{1}{p}$ en $N(p) = 0$, terwijl $T_D = \frac{2}{7}$ sec. Er geldt dan:

$$G(z) = \frac{0,204(1+0,042z^{-1})(1+1,947z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0,368z^{-1})}$$

Er geldt:

$$M(z) = z^{-1}(1+0,947z^{-1})(1+0,042z^{-1})m_0$$

$$1-M(z) = (1-z^{-1})(1+f_1z^{-1}+f_2z^{-2})$$

$$m_0 = \frac{1}{1+z_0+z_1} = 0,492, \quad f_1 = 0,508 \quad \text{en} \quad f_2 = 0,020$$

$$\begin{aligned} \text{zodat: } D(z) &= \frac{0,492z^{-1}(1+0,947z^{-1})(1+0,042z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0,508z^{-1}+0,020z^{-2})} \\ &\quad \times \frac{(1-z^{-1})(1-0,368z^{-1})}{0,204(1+0,042z^{-1})(1+0,947z^{-1})z^{-1}} \\ &= \frac{2,411(1-0,368z^{-1})}{1+0,508z^{-1}+0,020z^{-2}} \end{aligned}$$

$$E_1(z) = R(z)(1-M^1(z))$$

$$= \frac{1}{(1-z^{-1})} (1-z^{-1})(1+0,508z^{-1}+0,020z^{-2})$$

$$\{e_1(nT)\} = \{1, 0,508, 0,020, 0, 0, \dots\}$$

$$E_2(z) = D(z) E_1(z) = 2,411(1 - 0,368z^{-1})$$

$$\{e_2(nT)\} = \{2,411, -0,887, 0, 0, \dots\}$$

(zie fig. 13.5, c en e_2 zijn volgetrokken aangegeven).

3. Er wordt op het systeem een storing gezet met $N(p) = \frac{1}{p+a}$ en $R(p) = 0$, terwijl $T_D = 0$. Er geldt dan:

$$1 - M_1^1(z) = m_0 e^{-aT} z^{-1} (1 + 0,717 z^{-1})$$

$$M_1^1(z) = (1 - e^{-aT} z^{-1})(1 + f_1 z^{-1})$$

$$m_0 e^{-aT} = e^{-aT} - f_1 \text{ en } 0,717 m_0 = f_1$$

$$\text{voor } e^{-aT} = 0,368 \text{ geldt}$$

$$m_0 = 0,339 \text{ en } f_1 = 0,243$$

$$\begin{aligned} \text{zodat } D(z) &= \frac{0,124 z^{-1} (1 + 0,717 z^{-1})}{(1 - 0,368 z^{-1})(1 + 0,243 z^{-1})} \cdot \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0,368 z^{-1})}{0,368(1 + 0,717 z^{-1})z^{-1}} \\ &= \frac{0,339(1 - z^{-1})}{1 + 0,243 z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1(z) = -C(z) = -N(z) M_1^1(z) &= \frac{-1}{1 - 0,368 z^{-1}} \times \\ &\times (1 - 0,368 z^{-1})(1 + 0,243 z^{-1}) \end{aligned}$$

$$\{e_1(nT)\} = \{-1, -0,243, 0, 0, \dots\}$$

$$E_2(z) = D(z) E_1(z) = \frac{-(1 + 0,243 z^{-1}) 0,339(1 - z^{-1})}{1 + 0,243 z^{-1}}$$

$$\{-e_2(nT)\} = \{0,339, 0,339, 0, 0, \dots\}$$

(zie fig. 13.6, c en e_2 zijn volgetrokken aangegeven).

13.3.4 *Konklusies ripple free response method*

1. Het minimum aantal bemonsteringstijdstippen, N , waarin de gewenste responsie wordt bereikt op de bemonsteringstijdstippen en daarna ook tussen de bemonsteringstijdstippen het gewenste signaal exakt volgt, is:

- a. afhankelijk van de orde n van het proces $G_1(p)$.
- b. afhankelijk van de dode tijd $T_D = k_1 T$ van het proces.
- c. afhankelijk van het type ingangssignaal R resp. het stoorsignaal N .
- d. afhankelijk van het aantal polen van $G(z)$ dat buiten de eenheidscirkel ligt.
Stel dat dit aantal k_3 bedraagt.

Indien $r(t)$ of $n(t)$ van de vorm $t^{k_2} U(t)$ is geldt voor het minimum aantal N : $N = n + k_1 + k_2 + k_3$.

Indien $k_1 T < T_D < (k_1 + 1) T_D$ dient N nog met 1 verhoogd te worden.

2. Het bovenstaande geldt slechts indien $G_1(p)$ voldoende integraties bevat d.w.z. dat $G_1(p)$ opdat een signaal $t^{k_2} U(t)$ gevolgd kan worden minstens k_2 integraties bevat (type- k_2 systeem).

3. De responsie zal in het algemeen geen doorslingering vertonen voordat $t = NT$ wordt bereikt, tenzij $G_1(p)$ nulpunten bevat.

4. Het stuursignaal $e_2(nT)$ zal slechts gedurende $0 < t < NT$ een ringing effect vertonen en daarna konstant blijven.

5. Het ontwerp is minder gevoelig voor parametervariaties omdat het ontwerp er niet meer op berust dat de nulpunten van $G(z)$ wegvallen tegen polen van $D(z)$.

6. Het ontwerp is onafhankelijk van de bemonsteringstijd en de grootte van hetingangssignaal resp. stoorsignaal.

T.o.v. m.s.t.c. is het stuursignaal bij een bepaalde keuze van T echter aanzienlijk kleiner zodat minder gevaar voor oversturing zal optreden.

7. De ontworpen regelaar werkt slechts voor een bepaalde klasse van ingangs- en stoorsignalen omdat bij de keuze van $M^1(z)$ resp. $M_1^1(z)$ rekening wordt gehouden met $R(z)$ resp. $N(z)$.

13.4 METHODE VAN TOESTANDSTERUGKOPPELING

Bij de voorgaande twee methoden was steeds sprake van een ontwerp van $D(z)$ waarbij polen en nulpunten van $D(z)$ en $G(z)$ tegen elkaar wegvallen. Bij de r.f.r.c. methode is reeds bereikt dat de polen van $D(z)$ niet meer wegvallen tegen de nulpunten van $G(z)$ maar het ontwerp is zodanig dat nog wel de nulpunten van $D(z)$ wegvallen tegen de polen van $G(z)$. Dit houdt in dat het ontwerp gevoelig is voor variaties in de parameters van het proces $G_1(p)$.

Dit bezwaar wordt ondervangen door de in deze paragraaf aangegeven methode. Zoals de naam van deze methode aangeeft gaat men uit van het systeem beschreven in toestandsvergelijkingen. Het is echter ook mogelijk dit probleem te benaderen vanuit de in de voorgaande paragrafen geschetste aanpak.

Bij gebruik van de methode van toestandsgrootheden gaat men als volgt te werk:

Het proces wordt beschreven door:

$$\underline{x}(kT+T) = e^{AT} \underline{x}(kT) + \underline{h}(T) u(kT)$$

indien het systeem slechts één ingang bevat.

Stel dat uitgegaan wordt van een willekeurige begintoestand $\underline{x}(0)$ ten tijde $t = 0$, is het dan mogelijk om in een eindig aantal bemonsteringstijdstippen de evenwichtstoestand $\underline{x}(NT) = 0$ te bereiken?

Voor $\underline{x}(NT)$ geldt:

$$\underline{x}(NT) = (e^{AT})^N \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} (e^{AT})^{N-1-i} \underline{h}(T) u(iT) \quad (13-13)$$

Indien het linkerlid gelijk aan nul gesteld wordt en $N = n$ gesteld wordt geldt:

$$-(e^{AT})^n \underline{x}(0) = \{(e^{AT})^{n-1} \underline{h}(T), (e^{AT})^{n-2} \underline{h}(T), \dots, \underline{h}(T)\} \underline{u}$$

met $\underline{u}^T = (u(0), u(T), \dots, u(nT-T))$

Als gesteld wordt:

$$(e^{AT})^{n-1} \underline{h}(T), (e^{AT})^{n-2} \underline{h}(T), \dots, \underline{h}(T) = G \quad (13-14)$$

geldt:

$$\underline{u} = -G^{-1} (e^{AT})^n \underline{x}(0)$$

Het is mogelijk G^{-1} te bepalen indien het systeem regelbaar is (zie hoofdstuk XII).

Stel $-G^{-1} (e^{AT})^n = F$ dan geldt:

$$\underline{u} = F \underline{x}(0) \quad (13-14)$$

Het is mogelijk $u(0)$ te berekenen:

$$u(0) = f_{11} x_1(0) + f_{12} x_2(0) + \dots + f_{1n} x_n(0)$$

Als $u(0)$ bekend is kan $\underline{x}(T)$ bepaald worden, immers

$$\underline{x}(T) = e^{AT} \underline{x}(0) + \underline{h}(T) u(0)$$

Neemt men aan dat $\underline{x}(T)$ de nieuwe begintoestand is, dan kan men uitgaande van deze begintoestand $u(T)$ berekenen.

Er geldt dan:

$$u(T) = f_{11} x_1(T) + f_{12} x_2(T) + \dots + f_{1n} x_n(T)$$

Deze procedure kan men ook herhalen voor $u(2T)$, $u(3T)$, ..., $u(nT-T)$.

Hieruit volgt dus voor hetingangssignaal $u(kT)$:

$$u(kT) = f_{11} x_1(kT) + f_{12} x_2(kT) + \dots + f_{1n} x_n(kT) \quad (13-16)$$

voor $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\text{of } u(kT) = \underline{f}^T \underline{x}(kT) \text{ met } \underline{f}^T = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n})$$

waarin \underline{f}^T de eerste rij van $-G^{-1} (e^{AT})^n = F$ is.

Voorbeeld 13.8

Voor het proces $G_1(p) = \frac{1}{p(p+1)}$ kan afgeleid worden

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,368 & 0 \\ 0,632 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,632 \\ 0,368 \end{pmatrix} u(k)$$

of

$$\underline{x}(k+1) = e^{AT} \underline{x}(k) + \underline{h}(T) u(k)$$

Hieruit kan $-G^{-1}(e^{AT})^N = F$ bepaald worden met $N = 2$ en $G = [e^{AT} \underline{h}(T), \underline{h}(T)]$ voor f^T wordt gevonden: $-f^T = (1,24 \ 1,58)$.

Het regelde systeem wordt weergegeven in fig. 13.8.

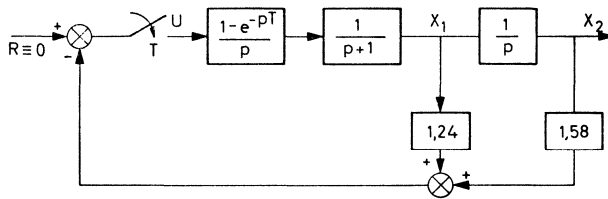


Fig. 13.8

13.4.1 Rekonstruktie toestandsgrootheden

Het nadeel van deze configuratie is dat alle toestandsgrootheden waarneembaar moeten zijn. Als slechts de uitgang meetbaar is kunnen de overige toestandsgrootheden gerekonstrueerd worden. Indien het proces van de n^{de} orde is moeten $n-1$ toestandsgrootheden gerekonstrueerd worden om de begintoestand $\underline{x}(0)$ te bepalen. Daarna is een regeling nodig die n tijdstippen in beslag neemt, zodat de eindtoestand $\underline{x} = \underline{0}$ wordt bereikt in $2n-1$ perioden. Om $\underline{x}(0)$ te bepalen wordt uitgegaan van de volgende n vergelijkingen:

$$y(0) = \underline{c}^T \underline{x}(0)$$

$$y(T) = \underline{c}^T \underline{x}(T) = \underline{c}^T e^{AT} \underline{x}(0) + \underline{c}^T \underline{h}(T) u(0)$$

\vdots

$$y(nT-T) = \underline{c}^T (e^{AT})^{n-1} \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-2} \underline{c}^T (e^{AT})^{n-2-i} \underline{h}(T) u(iT)$$

of

$$\underline{y} = P \underline{x}(0) + Q \underline{u} \quad (13-17)$$

met $\underline{y} = (y(0), y(T), \dots, y(nT-T))$ en

$$\underline{u}^T = (u(0), \dots, u(nT-2T))$$

$$P = \begin{pmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T e^{AT} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{c}^T (e^{AT})^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{c}^T \underline{h}(T) & 0 & \dots & 0 \\ \underline{c}^T e^{AT} \underline{h}(T) & \underline{c}^T \underline{h}(T) & & 0 \\ \vdots & & & \\ \underline{c}^T (e^{AT})^{n-2} \underline{h}(T) & \dots & \dots & \underline{c}^T \underline{h}(T) \end{pmatrix}$$

Als het proces waarneembaar is geldt:

$$\underline{x}(0) = P^{-1}y - P^{-1}Qu \quad (13-18)$$

Voor $N = n - 1$ geldt:

$$u(nT - T) = f^T \underline{x}(nT - T)$$

terwijl tevens geldt:

$$\underline{x}(nT - T) = (e^{AT})^{n-1} \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-2} (e^{AT})^{n-2-i} \underline{h}(T) u(iT)$$

Aangezien $\underline{x}(0) = P^{-1}y - P^{-1}Qu$

geldt:

$$u(nT - T) = f^T \{ (e^{AT})^{n-1} (P^{-1}y - P^{-1}Qu) + \sum_{i=0}^{n-2} (e^{AT})^{n-2-i} \underline{h}(T) u(iT) \} \quad (13-19)$$

Voorbeeld 13.9

Indien hetzelfde proces wordt genomen als in voorbeeld 13.8, waarin alleen y ter beschikking is geldt dus:

$$\underline{c}^T = (0, 1), \quad e^{AT} = \begin{pmatrix} 0,368 & 0 \\ 0,632 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad h(T) = \begin{pmatrix} 0,632 \\ 0,368 \end{pmatrix}$$

verder geldt:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T e^{AT} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1,58 & 1,58 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{c}^T \underline{h}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,368 \end{pmatrix}$$

$$f^T = (1,24, 1,58)$$

Hieruit kan $u(1)$ berekend worden:

$$u(1) = 2,304y(1) - 0,725y(0) - 0,520u(0)$$

Hieruit volgt:
$$\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{2,304z - 0,725}{z + 0,520}$$

13.4.2 Verband met de r.f.r.c.

Zoals reeds opgemerkt in paragraaf 13.4 kunnen de resultaten die zojuist zijn afgeleid ook bereikt worden met een aanpak die grote gelijkenis vertoont met de m.s.t.c. en de r.f.r.c. Dit wordt nagegaan voor een volgsysteem. Men gaat dan uit van de volgende eisen:

Neem in $M(z)$ alle nulpunten van $G(z)$ en in $1 - M(z)$ alle polen van $G(z)$ op. Algemeen kan men dan stellen:

$$M(z) = GT(z) \cdot P_1(z)$$

$$1 - M(z) = GN(z) \cdot P_2(z)$$

waarin P_1 en P_2 polynomen zijn met een zodanig aantal nog te bepalen parameters p dat $M(z)$ kan worden opgelost.

Voor het geval $G_1(p)$ van de n^{de} orde is, is zowel $GT(z)$ als $GN(z)$ een polynoom van de n^{de} orde in z^{-1} .

Stel dat $P_1(z)$ en $P_2(z)$ van de p^{de} orde in z^{-1} zijn dan ontstaan er, wanneer $M(z)$ wordt opgelost $n+p+1$ vergelijkingen waaruit $2(p+1)$ onbekenden dienen te worden opgelost. Dit is mogelijk indien $p = n-1$.

Hieruit volgt ook direkt dat voor een stapvormig ingangssignaal geldt dat $N = (2n-1)T$ omdat M van de $(2n-1)^{\text{e}}$ orde is in z^{-1} . Uiteraard geldt dit slechts indien het proces geen dode tijd heeft.

Voorbeeld 13.10

Stel $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$ met $T=1$ sec. dan geldt $G(z) = \frac{0,368(1+0,717z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0,368z^{-1})}$.

Voor een stapvormig ingangssignaal moet dan gelden:

$$M(z^{-1}) = 0,368z^{-1}(1+0,717z^{-1})(p_{10} + p_{11}z^{-1}) \text{ en}$$

$$1 - M(z^{-1}) = (1-z^{-1})(1-0,368z^{-1})(p_{20} + p_{21}z^{-1}).$$

Hieruit volgt door $M(z^{-1})$ in een van de vergelijkingen in te vullen na uitwerking:

$$(p_{10}, p_{11}, p_{20}, p_{21}) = (2,304, -0,725, 1, 0,520).$$

Door deze waarden in te vullen in $D(z) = \frac{M(z^{-1})}{1 - M(z^{-1})} \frac{1}{G(z)}$

$$\text{ontstaat } D(z) = \frac{p_1(z^{-1})}{p_2(z^{-1})} = \frac{2,304 - 0,725z^{-1}}{1 + 0,520z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{en } C(z) &= M(z) R(z) \\ &= 0,368 z^{-1} (1 + 0,717 z^{-1}) (2,304 - 0,725 z^{-1}) (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) \end{aligned}$$

Hieruit volgt $\{c(nT)\} = \{0.878, 1.188, 1, 1, \dots\}$.

$$E_1(z) = R(z)(1 - M(z)) = \frac{1}{1 - z^{-1}} (1 - z^{-1}) (1 - 0,38 z^{-1}) (1 + 0,52 z^{-1})$$

Hieruit volgt: $E_1(z) = 1 + 0,152 z^{-1} - 0,188 z^{-2}$.

$$\begin{aligned} E_2(z) &= D(z) E_1(z) = \frac{(2,304 - 0,725 z^{-1})}{(1 + 0,520 z^{-1})} (1 - 0,368 z^{-1}) (1 + 0,520 z^{-1}) \\ &= (2,304 - 0,725 z^{-1}) (1 - 0,368 z^{-1}) \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $\{e_2(nT)\} = \{2.304, -1.576, 0.266, 0, 0, \dots\}$
(zie fig. 13.4 waarin $e(t)$ en e_2 met nulletjes zijn aangegeven).

13.4.3 Konklusies methode van toestandsterugkoppeling

De methode van toestandsterugkoppeling kan algemeen worden gebruikt voor systemen met meer in- en uitgangen. Indien het systeem slechts één ingangs- en één uitgangsgrootheid heeft kan men ook door in $M(z)$ de nulpunten van $G(z)$ op te nemen en in $1 - M(z)$ de polen van $G(z)$, een regelaar $D(z)$ afleiden. Deze regelaar is dezelfde die wordt gevonden bij de methode van de toestandsterugkoppeling indien men er vanuit gaat dat slechts de uitgang meetbaar is. Enige algemene konklusies die betrekking hebben op de methode van toestandsterugkoppeling zijn:

1. Het minimum aantal bemonsteringsperiodes N , waarin vanuit een willekeurige begintoestand $\underline{x}(0)$ een gewenste toestand $\underline{x}_g(NT)$ wordt bereikt en daarna ook niet meer afwijkt van deze toestand, is:
 - a. afhankelijk van de orde n van het proces $G_1(p)$.
 - b. afhankelijk van de dode tijd $T_D = k_1 T$ van het proces.
 - c. afhankelijk van de begintoestand $\underline{x}(0)$.
 - d. afhankelijk van het aantal toestandsgrootheden p dat direkt meetbaar is.
- Indien alle toestandsgrootheden meetbaar zijn ($p = n$) bedraagt N :

$$N = n + k_1$$

Indien alleen de uitgangsgrootheid meetbaar is ($p = 1$) bedraagt N :

$$N = 2n - 1 + k_1$$

Indien p toestandsgrootheden meetbaar zijn bedraagt N

$N = n + k_1 + \frac{n-p}{p}$, als $\frac{n-p}{p}$ een geheel getal is. Indien dit niet het geval is moet een afronding plaatsvinden naar het dichtsbijliggende gehele getal dat groter is dan $\frac{n-p}{p}$.

2. Indien uitgegaan wordt van een begintoestand $\underline{x}(0) = \underline{0}$ en aan het systeem eeningangssignaal van de vorm $t^{k_2}U(t)$ wordt aangeboden, wordt dezelfde regelaar gevonden als hiervoor aangegeven indien $G_1(p)$ ten minste $k_2 + 1$ integratoren bevat.

Indien dit niet het geval is kan men aan $D(z)$ integratoren toevoegen zodat het totale aantal termen $(z-1)$ in de noemer van $D(z)$ en $G(z)$: $k_2 + 1$ bedraagt. Voor N wordt de volgende waarde gevonden:

$N = n + k_1 + k_2 + 1$ indien alle toestandsgrootheden meetbaar zijn en het proces geen integratoren bevat.

$N = n + k_1 + k_2 + 1 - k_3$ indien het proces k_3 integratoren heeft met $k_3 < k_2 + 1$

$N = 2n - 1 + k_1 + k_2 + 1 - k_3 = 2n + k_1 + k_2 - k_3$ indien slechts de uitgang meetbaar is.

3. De responsie kan een doorslingering vertonen voordat $t = NT$ wordt bereikt.

4. Het stuursignaal zal slechts gedurende $0 < t < NT$ een ringing effect vertonen.

5. Het ontwerp is niet sterk gevoelig voor parameter variaties in $G(z)$ omdat er bij het ontwerp van $D(z)$ geen nulpunten en polen van $D(z)$ moeten wegvallen tegen polen en nulpunten van $G(z)$.

6. Het ontwerp is onafhankelijk van de bemonsteringstijd en de grootte van de begintoestanden $\underline{x}(t)$ of hetingangssignaal.

T.a.v. de voorgaande methoden is het stuursignaal bij een bepaalde keuze van T kleiner omdat er gedurende een langere tijd een sturing wordt aangeboden. Het gevaar van oversturing zal minder snel optreden.

Appendix A. Bewijs van de inverse z-transformatie en bewijzen van een aantal eigenschappen van de z-transformatie

1. BEWIJS INVERSE Z-TRANSFORMATIE

De inverse Laplace-transformatie luidt:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp.$$

Vervang hierin $t = nT$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j}^{c+j} X(p) e^{pnT} dp.$$

Verdeel de lijn $c+j\omega$ in intervallen die korresponderen met de periodieke stroken:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{c+(m-\frac{1}{2})j\omega_s}^{c+(m+\frac{1}{2})j\omega_s} X(p) e^{pnT} dp; \quad m = \text{geheel getal.}$$

Stel $p' = p - jm\omega_s$, zodat

$$dp' = d(p - jm\omega_s) = dp$$

en

$$e^{nTp'} = e^{nT(p - jm\omega_s)} = e^{nTp},$$

dan volgt:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{c-\frac{1}{2}j\omega_s}^{c+\frac{1}{2}j\omega_s} X(p' + jm\omega_s) e^{-nTp'} dp'.$$

De sommatie mag binnen de integraal gebracht worden:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-\frac{1}{2}j\omega_s}^{c+\frac{1}{2}j\omega_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(p + jm\omega_s) e^{nTp} dp.$$

Er geldt dan:

$$X^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(p + jm\omega_s), \text{ waarin } p' \text{ vervangen wordt door } p$$

zodat

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-\frac{1}{2}j\omega_s}^{c+\frac{1}{2}j\omega_s} X^*(p) e^{nTp} dp.$$

Pas de z-transformatie toe:

$$p = \frac{1}{T} \ln z \quad (\text{of } z = e^{pT}),$$

dan is

$$\frac{dz}{dp} = T e^{pT} \quad \text{of} \quad dp = \frac{1}{T} e^{-pT} dz = \frac{z^{-1}}{T} dz$$

en

$$X^*(p) \Big|_{p = \frac{1}{T} \ln z} = X(z).$$

Hiermee volgt dan:

$$\begin{aligned} x(nT) &= \frac{T}{2\pi j} \oint_c X(z) z^n \frac{z^{-1}}{T} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz. \end{aligned}$$

2. BEWIJS VAN DE REËLE VERSCHUIVINGSTHEOREMA'S

$$\begin{aligned} \text{a. } Z\{f(t-mT)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT-mT) z^{-n} \\ &= f(-mT) + f(T-mT)z^{-1} + \dots + \\ &\quad + f(0)z^{-m} + f(T)z^{-m-1} + \dots \end{aligned}$$

Voor $t < 0$, is $f(t) = 0$, dus

$$\begin{aligned} Z\{f(t-mT)\} &= f(0)z^{-m} + f(T)z^{-m-1} + \dots \\ &= z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = z^{-m} F(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } Z\{f(t+mT)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+mT) z^{-n} \\ &= f(mT) + f(mT+T)z^{-1} + \dots \\ &= \{f(0) + f(T)z^{-1} + \dots + f(mT-T)z^{-m+1}\} z^m + \\ &\quad + \{f(mT)z^{-m} + f(mT+T)z^{-m-1} + \dots\} z^m \\ &\quad - \{f(0) + f(T)z^{-1} + \dots + f(mT-T)z^{-m+1}\} z^m \\ &= z^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) z^{-k} \right] \\ &= z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) z^{-k} \right]. \end{aligned}$$

3. BEWIJS VAN HET KOMPLEXE VERSCHUIVINGSTHEOREMA

$$\begin{aligned} Z\{e^{-at}f(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} f(nT) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) (ze^{+aT})^{-n}. \end{aligned}$$

Stel $ze^{aT} = z_1$, dan geldt:

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z_1^{-n} = F(z_1) = F(ze^{-aT}).$$

4. BEWIJS VAN DE SOMMATIEREGEL

$$g(nT) = \sum_{k=0}^n f(kT) \quad \text{en} \quad g(nT-T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(kT).$$

Hieruit volgt:

$$g(nT) = g(nT-T) + f(nT)$$

met $g(nT-T) = 0$ voor $n = 0$.

Door gebruik te maken van de verschuivingsregel wordt verkregen:

$$G(z) = z^{-1} G(z) + F(z).$$

Hieruit volgt:

$$G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} F(z) = \frac{z}{z-1} F(z).$$

5. BEWIJS VAN DE VERMENIGVULDIGINGSREGEL MET $a^{\pm n}$

$$\text{a. } Z\{a^n f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) (a^{-1} z)^{-n}$$

Stel $a^{-1} z = z_1$, dan geldt:

$$Z\{a^n f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z_1^{-n} = F(z_1) = F(a^{-1} z)$$

$$\text{b. } Z\{a^{-n} f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) a^{-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) (az)^{-n}$$

Stel $az = z_1$, dan geldt:

$$Z\{a^{-n} f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z_1^{-n} = F(z_1) = F(az).$$

6. BEWIJS VAN DE SCHAACLEIGENSCHAP

$$\begin{aligned} Z\{f(at)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(anT)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(anT)(z^{\frac{1}{a}})^{-an} \end{aligned}$$

Stel $z^{\frac{1}{a}} = z_1$, dan geldt

$$Z\{f(anT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(anT)z_1^{-an}$$

Stel $an = n_1$, dan geldt:

$$Z\{f(at)\} = \sum_{n_1=0}^{\infty} f(n_1T)z_1^{-n_1} = F(z_1) = F(z^{\frac{1}{a}}).$$

7. BEWIJS VAN DE VERMENIGVULDIGINGSREGEL MET $t^{\pm m}$

Voor $Z\{tf(t)\}$ zal het bewijs gegeven worden:

$$\begin{aligned} Z\{tf(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} nTf(nT)z^{-n} = Tz \sum_{n=0}^{\infty} nf(nT)z^{-n-1} \\ \frac{dF}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} = - \sum_{n=0}^{\infty} nf(nT)z^{-n-1} \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$Z\{tf(t)\} = -Tz \frac{dF(z)}{dz}.$$

8. BEWIJS VAN DE LIMIETWAARDENTHEOREMA'S

a. $F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + \dots$

Voor $z \rightarrow \infty$ geldt: $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$

b. $Z\{f(nT+T) - f(nT)\} = zF(z) - zf(0) - F(z)$

Tevens geldt:

$$Z\{f(nT+T) - f(nT)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k [f(nT+T) - f(nT)]z^{-n}$$

Hieruit volgt door gelijkstelling en na delen door z :

$$\frac{z-1}{z} F(z) - f(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k [f(nT+T) - f(nT)] z^{-n-1}.$$

Voor $z \rightarrow 1$ gaat deze vergelijking over in:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) - f(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT+T) - f(0)$$

of

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z).$$

9. BEWIJS VAN DE KONVOLUTIE-EIGENSCHAPPEN

$$\text{a. } Z \left\{ \sum_{n=0}^k x(n) h(k-n) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k x(n) h(k-n) z^{-k}$$

Aangezien $h(k-n) = 0$ voor $n > k$ kan ook geschreven worden:

$$\begin{aligned} Z \left\{ \sum_{n=0}^k x(n) h(k-n) \right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) h(k-n) z^{-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(n) h(k-n) z^{-k} \end{aligned}$$

Stel $k-n = m$, dan geldt:

$$Z \left\{ \sum_{n=0}^k x(n) h(k-n) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{\infty} x(n) h(m) z^{-n} z^{-m}$$

Aangezien $h(m) = 0$ voor $m < 0$, geldt

$$Z \left\{ \sum_{n=0}^k x(n) h(k-n) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x(n) z^{-n} h(m) z^{-m} = X(z) H(z)$$

$$\text{b. } Z \{f_1(t) f_2(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) f_2(nT) z^{-n}$$

Met behulp van de inverse z-transformatie toegepast op $f_1(nT)$ wordt gevonden:

$$\begin{aligned} Z \{f_1(t) f_2(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_c F_1(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta f_2(nT) z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{F_1(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-n} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{F_1(\zeta)}{\zeta} F_2\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta. \end{aligned}$$

10. BEWIJS VAN HET THEOREMA VAN PARSEVAL

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)f_2(nT) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT) \frac{1}{2\pi j} \oint_C F_1(z) z^{n-1} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C F_1(z) z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT) \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C F_1(z) F_2\left(\frac{1}{z}\right) z^{-1} dz.
 \end{aligned}$$

Appendix B. Oplossing van de matrixfuncties e^{At} en A^N

1. OPLOSMETHODEN VOOR e^{At}

Oplossing van de matrixfunctie e^{At} is mogelijk via diverse methoden. Het rekenwerk neemt snel toe met de orde van A en het zal daarom veelal nodig zijn hiervoor een rekenmachineprogramma te schrijven.

Op een vijftal mogelijkheden wordt nu nader ingegaan.

1. Toepassing van de inverse Laplace transformatie.

Indien de homogene toestandsvergelijking wordt genomen: $\dot{x} = Ax$ geldt de oplossing $x(t) = e^{At} x(0)$.

De toestandsvergelijking kan Laplace getransformeerd worden.

Er geldt dan:

$$pX(p) - x(0) = AX(p) \text{ of } (pI - A)X(p) = x(0) \\ X(p) = (pI - A)^{-1} x(0)$$

Door toepassing van de inverse Laplace transformatie wordt $x(t)$ verkregen:

$$x(t) = L^{-1} \{ (pI - A)^{-1} \} x(0)$$

Hieruit volgt:

$$e^{At} = L^{-1} \{ (pI - A)^{-1} \}$$

Op de bemonsteringstijdstippen geldt:

$$e^{AT} = L^{-1} \{ (pI - A)^{-1} \}_{t=T}$$

Deze procedure vereist veel werk en bovendien de inversie van een matrix. Voor systemen van hogere orde wordt deze inversie vermeden door gebruik te maken van de volgende methode:

2. Toepassing van het theorema van Leverrier.

$$\text{Door te schrijven } (pI - A)^{-1} = \frac{A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \dots + A_n}{p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}$$

met $p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n = \det(pI - A)$ en matrices A_i van de n^{de} orde kunnen de volgende gelijkheden bewezen worden:

$$\begin{aligned}
A_1 &= I \\
b_1 &= -\text{spoor}(AA_1) \\
A_2 &= AA_1 + b_1 I \\
b_2 &= -\text{spoor}\left(\frac{AA_2}{2!}\right) \\
A_3 &= AA_2 + b_2 I \\
b_3 &= -\text{spoor}\left(\frac{AA_3}{3!}\right) \\
&\vdots \\
A_n &= AA_{n-1} + b_{n-1} I
\end{aligned}$$

Bovendien moet gelden $AA_n + b_n I = 0$. Dit is een controle of er tijdens de berekeningen te grote onnauwkeurigheden zijn gemaakt.

Dit is een iteratieve procedure die eenvoudig is te programmeren maar het nadeel heeft dat gemeenschappelijke factoren in de teller en de noemer van $(pI - A)^{-1}$ moeilijk programmatisch kunnen worden opgespoord.

3. Diagonaliseren.

Indien A een diagonaal matrix is van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ geldt: } e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 T} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n T} \end{pmatrix}$$

Meestal is A niet gegeven in diagonaal vorm en dient de matrix gediagonaliseerd te worden.

Dit gebeurt met een similariteitstransformatie:

$$A = M \Lambda M^{-1}$$

waarin Λ een diagonaalmatrix is met op de diagonaal de eigenwaarden van A , M is een matrix waarvan de kolomvectoren gevormd worden door de eigenvectoren van A .

Er geldt nu: $e^{AT} = M e^{\Lambda T} M^{-1}$

hetgeen men kan bewijzen door linker- en rechterlid in een reeks te ontwikkelen.

Het bovenstaande geldt indien er geen samenvallende eigenwaarden zijn. Indien dit wel het geval is moet men overgaan tot de zogenaamde Jordan-vorm. De methode vereist een berekening van de eigenwaarden en het opstellen van de matrix M en de inverse van deze matrix. De inversie van deze matrix is echter eenvoudig omdat de elementen geen functies van p zijn.

4. De methode van Cayley-Hamilton.

Een functie van een matrix kan ontwikkeld worden in de som van een eindig aantal, n , matrices.

Er geldt:

$$e^{AT} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(T) A^i$$

Deze gelijkheid heeft n onbekende coëfficiënten $c_i(T)$.

Deze coëfficiënten worden bepaald door de eigenschap toe te passen dat bovenstaande vergelijking ook geldt voor de eigenwaarden van de matrix, d.w.z.

$$e^{\lambda_j T} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(T) \lambda_j^i \quad \text{voor } j = 1, 2, \dots, n,$$

waarin λ_j de eigenwaarden van de matrix $(pI - A)$ zijn.

Indien er meervoudige eigenwaarden zijn, bijvoorbeeld een m -voudige eigenwaarde λ_k dient men $m-1$ maal te differentiëren.

$$\begin{aligned} e^{\lambda_k T} &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i(T) \lambda_k^i \\ T e^{\lambda_k T} &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(T) \cdot i \cdot \lambda_k^{i-1} \\ &\vdots \\ T^{m-1} e^{\lambda_k T} &= \sum_{i=m-1}^{n-1} c_i(T) \cdot i \cdot (i-1) \dots (i-m+2) \cdot \lambda_k^{i-m+1} \end{aligned}$$

5. Reeksontwikkeling van $e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{k!}$

Dit is een convergente reeks maar de reeks moet voor een bepaalde waarde van k worden afgebroken.

De convergentie van de reeks is niet erg goed en in het algemeen zal dus een groot aantal termen moeten worden meegenomen. Dit aantal is veel groter dan in methode 4. Bovendien worden afrondingsfouten gemaakt en is het moeilijk een reeks in de termen van de matrix te ontdekken.

De vijf methoden worden toegepast op het volgende voorbeeld.

Voorbeeld B.1: Gegeven een bemonsterd systeem met overdrachtfunctie

$$\frac{1}{p(p+1)}$$

voorafgegaan door een nulde orde houdschakeling.

In matrixnotatie geldt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_h$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Methode 1. $e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}\{(pI-A)^{-1}\}_{t=T}$

$$(pI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 0 & p+1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} p+1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \frac{1}{p(p+1)}$$

Hieruit volgt:

$$e^{AT} = L^{-1} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p(p+1)} \\ 0 & \frac{1}{p+1} \end{pmatrix} \right) \Bigg|_{t=T} = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$$

Methode 2. $(pI-A)^{-1} = \frac{sA_1+A_2}{s^2+b_1s+b_2}$ met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A_1 = I$$

$$b_1 = -\text{spoor}(AA_1) = -\text{spoor}(A) = -(0-1) = 1$$

$$A_2 = AA_1 + b_1I = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = -\text{spoor}\left(\frac{AA_2}{2!}\right) = -\frac{1}{2}\text{spoor} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrolle stap:

$$A_3 = AA_2 + b_2I = 0$$

Er geldt dus na invullen:

$$(pI-A)^{-1} = \frac{p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{p^2+p} = \begin{pmatrix} p+1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \frac{1}{p(p+1)}$$

Zie verder methode 1.

Methode 3. De wortels λ_1 en λ_2 volgen uit de determinant:

$$p(p+1) = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$$

De eigenvector v_1 die bij $\lambda_1 = 0$ behoort volgt uit:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \text{of} \quad v_{12} = 0 \quad \text{zodat} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

waarin $v_{11} = 1$ willekeurig is gekozen.

De eigenvector v_2 die bij $\lambda_2 = -1$ behoort volgt uit:

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = 0 \quad \text{of} \quad v_{21} + v_{22} = 0 \quad \text{zodat}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{waarin} \quad v_{21} = 1 \quad \text{willekeurig wordt gekozen.}$$

$$\text{Hieruit volgt: } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e^{AT} kan nu berekend worden:

$$e^{AT} = Me^{AT}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$$

Methode 4. De wortels λ_1 en λ_2 volgen uit de determinant $p(p+1) = 0$, dus $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = -1$

$$e^{AT} = c_0 I + c_1 A$$

bovendien geldt:

$$e^{\lambda_1 T} = c_0 + c_1 \lambda_1 \Rightarrow 1 = c_0$$

$$\text{en } e^{\lambda_2 T} = c_0 + c_1 \lambda_2 \Rightarrow e^{-T} = 1 - c_1 \quad \text{of} \quad c_1 = 1 - e^{-T}.$$

Nu kan e^{AT} bepaald worden:

$$e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - e^{-T}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$$

Methode 5. $e^{AT} = I + \frac{AT}{1!} + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots$

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A^2 = A \text{ enzovoort}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} e^{AT} &= I + A \left[T - \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} - \dots \right] \\ &= I + A \left[I - I + T - \frac{T^2}{2!} + \dots \right] \\ &= I + A(1 - e^{-T}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - e^{-T}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. OPLOSMETHODEN VOOR $(e^{AT})^N$ EN $(A)^N$

Een ander probleem dat zich voordoet bij de beschrijving van systemen met toestandsvergelijkingen, is de berekening van de matrix $(e^{AT})^N$ en A^N . De berekening van A^N kan ook weer plaats vinden volgens diverse methoden waarvan er hier een vijftal behandeld worden.

1. Toepassing van de inverse z-transformatie.

De homogene diskrete toestandsvergelijking luidt:

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) \text{ met als oplossing } \underline{x}(N) = A^N \underline{x}(0).$$

Door toepassing van de z-transformatie wordt verkregen:

$$\begin{aligned} z\underline{X}(z) - z\underline{x}(0) &= A\underline{X}(z) \text{ of } (zI - A) \underline{X}(z) = z\underline{x}(0) \\ \underline{X}(z) &= (zI - A)^{-1} z\underline{x}(0) \end{aligned}$$

Door toepassing van de inverse z-transformatie wordt $\underline{x}(N)$ verkregen:

$$\underline{x}(N) = Z^{-1} \{(zI - A)^{-1} z\} \underline{x}(0)$$

Dit levert de volgende gelijkheid op:

$$A^N = Z^{-1} \{(zI - A)^{-1} z\}_{t=N}$$

2. Toepassing van het theorema van Leverrier.

$$\text{Door te schrijven } (zI - A)^{-1} = \frac{A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}$$

met $z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = \det(zI - A)$ en A_i matrices van de n^{de} orde kunnen de volgende gelijkheden worden afgeleid:

$$\begin{aligned}
A_1 &= I \\
b_1 &= -\text{spoor} \frac{AA_1}{1!} \\
A_2 &= AA_1 + b_1 I \\
b_2 &= -\text{spoor} \frac{AA_2}{2!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hierbij is het aantal matrixbewerkingen beperkt tot n , terwijl $N \gg n$ kan zijn.

3. Diagonaliseren.

$$A^N = M(A)^N M^{-1}$$

waarin A een diagonaalmatrix is met op de diagonaal de eigenwaarde van A en M is een matrix waarvan de kolomvectoren gevormd worden door de eigenvectoren van A .

4. Methode van Cayley-Hamilton.

$$\text{Er geldt nu } A^N = \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i$$

$$\text{met } z_j^N = \sum_{i=0}^{n-1} c_i z_j^i$$

waarin z_j de eigenwaarden van $(zI - A)$ zijn.

Er moeten nu n lineaire vergelijkingen met n onbekende c_i opgelost worden. Het linkerlid van de vergelijking wijzigt indien N verandert.

5. $A^N = A.A \dots A$.

Het aantal matrix vermenigvuldigingen neemt rechtevenredig toe met N .

Voorbeeld B.2: Gegeven een diskreet systeem beschreven door de volgende differentievergelijkingen:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 4x_2(k) + 10u(k)$$

$$x_2(k+1) = 0.2x_2(k) + u(k)$$

of in matrix vorm

$$\underline{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

Methode 1. $A^N = Z^{-1} \{(zI - A)^{-1} z\}_{t=N}$

$$\begin{aligned}
 (zI - A)^{-1} z &= \begin{pmatrix} z-1 & -4 \\ 0 & z-0.2 \end{pmatrix}^{-1} z = \begin{pmatrix} z-0.2 & 4 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} \frac{z}{(z-1)(z-0.2)} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} & \frac{4z}{(z-1)(z-0.2)} \\ 0 & \frac{z}{z-0.2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} & 5\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.2}\right) \\ 0 & \frac{z}{z-0.2} \end{pmatrix} \\
 Z^{-1} \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} & 5\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.2}\right) \\ 0 & \frac{z}{z-0.2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 5(1-(0.2)^N) \\ 0 & (0.2)^N \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Methode 2. $(zI - A)^{-1} = \frac{A_1 z + A_2}{z^2 + b_1 z + b_2}$

$$A_1 = I$$

$$b_1 = -\text{spoor}(AA_1) = -\text{spoor}(A) = -(1+0.2) = -1,2$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = AA_1 + b_1 I &= A - 1,2I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -0,2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$b_2 = -\text{spoor}\left(\frac{AA_2}{2!}\right) = -\frac{1}{2} \text{spoor} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0,2$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 (zI - A)^{-1} z &= \frac{z}{z-1,2z+0,2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -0,2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{z}{(z-1)(z-0,2)} \begin{pmatrix} z-0,2 & 4 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} & \frac{4z}{(z-1)(z-0,2)} \\ 0 & \frac{z}{z \cdot 0,2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

zie verder methode 1.

Methode 3. De wortels van A zijn: $\lambda_1 = 0,2$ en $\lambda_2 = 1$.

De eigenvektor v_1 die bij λ_1 behoort volgt uit:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \begin{pmatrix} 1-0,2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \text{of} \quad 0,8v_{11} + 4v_{12} = 0$$

$$\text{zodat } v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De eigenwaarde v_2 die bij λ_2 behoort volgt uit:

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -0,8 \end{pmatrix} v_2 = 0 \quad \text{of} \quad v_{22} = 0$$

$$\text{zodat } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hieruit volgt } M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^N = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,2)^N & 0 \\ 0 & 1^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5(1-(0,2)^N) \\ 0 & (0,2)^N \end{pmatrix}$$

Methode 4. $A^N = c_0 I + c_1 A$. De wortels luiden $z_1 = 1$ en $z_2 = 0,2$.

Er gelden dus de volgende twee vergelijkingen:

$$z_1^N = c_0 + c_1 z_1 \Rightarrow 1 = c_0 + c_1$$

$$z_2^N = c_0 + c_1 z_2 \Rightarrow (0,2)^N = c_0 + 0,2c_1$$

Aftrekken van deze vergelijkingen geeft

$$1 - (0,2)^N = 0,8c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1 - (0,2)^N}{0,8}$$

$$\text{en } c_0 = 1 - c_1 = 1 - \frac{(1 - (0,2)^N)}{0,8} = \frac{0,8 - 1 + (0,2)^N}{0,8} = \frac{0,2 + (0,2)^N}{0,8}$$

Hieruit kan A^N bepaald worden:

$$A^N = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 & 4c_1 \\ 0 & c_0 + 0,2c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{0,8} (1 - (0,2)^N) \\ 0 & (0,2)^N \end{pmatrix}$$

Methode 5. $A^N = A.A \dots$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 5(1-0,2) \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5(1-0,2) \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5(1-(0,2)^2) \\ 0 & (0,2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

enzovoort.

Het is moeilijk een reeks te herkennen in alle elementen van de matrix.

Literatuur

De hierna volgende literatuur geeft een overzicht van bestaande boeken op het gebied van digitale regelsystemen en systemen met signaalbemonstering. In de tekst staan enige specifieke literatuurverwijzingen die in de hierna volgende lijst eveneens zijn opgenomen.

Hoofdstuk I, II

Algemene verwijzingen:

- Smith, C.L., *Digital Computer process control*,
Scranton, Intext, 1972
- Anke, K., Kaltenecker, H. und Oetker, R., *Processrechner*,
Oldenbourg Verlag, München, 1971
- Harrison, Th. J., *Handbook of industrial control computers*,
Wiley Interscience, New York, 1972

Specifieke verwijzingen:

- 1.1 Schooneveld, C. van, Pulsvormen voor actieve sonar,
De Ingenieur, 28 januari, 1972
- 1.2 Runyan, H. M., Cybernetics of Economic System,
IEEE trans. on systems, man and cybernetics, SMC-I, no. 1, 1971
- 1.3 Nauta Lemke, H. R. van, and Bosch, P. P. J. van :
Toewijzing en uitvoering van een personeelsbeleid, internal report,
Technische Hogeschool Delft, Laboratorium voor Regeltechniek, 1972
- 1.4 Forrester, J.W., *World Dynamics*
Wright-Allen Press Inc., Cambridge, Massachusetts, 1971

Hoofdstuk III

- Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of sampled data control systems*,
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963
- Jury, E. I. *Sampled-data control systems*,
Wiley, New York, 1958
- Ragazzini, J. R. and Franklin, G. F., *Sampled-data control systems*,
McGraw Hill, New York, 1958
- Tou, J. T., *Digital and sampled-data control systems*,
McGraw Hill, New York, 1959
- Zypkin, Ya. S., *Theorie der linearen Impulssysteme*,
Oldenbourg, München, 1967
- Leonard, W., *Diskrete Regelsysteme*,
Bibliographisches Institut, Mannheim, 1972

Hoofdstuk IV

- Cadzwow, J. A. and Martens, H. R., *Discrete time and computer control systems*,
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1970
- Freeman, H., *Discrete-time systems*,
Wiley, New York, 1965
- Lindorff, D. P., *Theory of Sampled data systems*,
Wiley, New York, 1965
- Gold, B. and Rader, C. M., *Digital processing of signals*,
McGraw Hill, New York, 1968

Hoofdstuk V

- Jury, E. I., *Theory and application of the z-transform*,
Wiley, New York, 1964

Hoofdstuk IV t/m X

Boeken genoemd in hoofdstuk III en IV:

- Nauta Lemke, H. R. van, e.a., *Regeltechnische Monografieën, deel I en deel II*,
U.P.R., Rotterdam, 1967
- Smith, C.L., *Digital Computer process control*,
Scranton, Intext, 1972

Specifieke verwijzingen:

- 7.1 Marden, M., The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable,
Am. Math. Soc., New York, 1949 (pp. 152-157)
- 7.2 Jury, E. I., and Blanchard, J., A stability test for linear discrete systems in table form,
IRE Proc. 49, no. 12, December 1961, pp. 1957-48
- 8.1 Latzel, W., and Wiegand, R., Digsis- a simulation language for dynamic processes and
DDC,
Proc. Discop-IFAC symposium on digital simulation of continuous processes, 1971

Hoofdstuk XI

- Monroe, A. J., *Digital processes for sampled-data systems*,
Wiley, New York, 1962
- Cadzwow, J.A., *Discrete-time systems*,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973
- Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of sampled-data control systems*,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963
- Leonard, W., *Diskrete Regelsysteme*,
Bibliographisches Institut, Mannheim, 1972

Hoofdstuk XII

- Ackermann, J., *Abtastregelung*,
Springer Verlag, Berlin, 1972

- Cadzow, J. A. and Martens, H. R., *Discrete time and computer control systems*,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970
- Kuo, B. C., *Discrete-data control systems*,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970
- Wiberg, M. D., *Schaum's outline of theory and problems of state space and linear systems*,
McGraw Hill, New York, 1971

Hoofdstuk XIII

- Mullin, F.J. and Debarbeyrac, J., Linear digital control,
Journal of Basic Eng., ASME trans., 86, March, 1964, pp. 61-65
- Tou, J. T., *Modern control theory*,
McGraw Hill, New York, 1964

Specifieke verwijzing:

- 12.1 Salaba, M., *Eine geometrische Methode für den Entwurf von Abtastsysteme mit Begrenzungskennlinien*, Dis. Karlsruhe, 1970

Register

- Achterwaartse differentie, 66
- additieve eigenschap, 83
- alarmscanning, 26
- analoog-digitaal omzetter, 3, 8, 15, 19, 33, 36
- asynchrone bemonstering, 204
- availability, 36

- Beginvoorwaarden representatie in blok-schema's, 107 e.v.
- beginwaarde theorema, 87, 288
- bemonsteraar, 4
- bemonsteren, 2, 4, 8, 37, 53
 - mathematische beschrijving van het bemonsteringsproces, 43 e.v.
 - meervoudig bemonsteren, 92, 204
- bemonsteringstijd/periode, 11, 199
- bilineaire transformatie, 120
- blokschema's, 103 e.v., 107 e.v.
- bodediagrammen, 135 e.v.
- breuksplitsen, 90, 91
- bumpless transfer, 191

- Data logging, 26
- d.d.c., zie directe digitale regeling
- deltafunctie, 45
- differentiërende aktie, 192, 195 e.v.
- differenties, 85
- differentievergelijkingen, 42, 65 e.v.
- digitaal-analoog omzetter, 3, 19, 35, 36
- digitaal element, 3, 79
- digitaal filter, 161, 184 e.v., 209 e.v.
- digitaal signaal, 3
- digitaal systeem, 2, 3, 12
- digitale rekenmachine, 12, 13, 18 e.v., 188,
 - zie ook process computers
- directe digitale regeling, 28, 31
- directe programmering, 211
- discontinuïteit in inverse Laplace transformatie, 50, 97
- discreet element, 3, 41, 65, 86
- discreet signaal, 3
- discreet systeem, 47 e.v., 141 e.v., 156 e.v.
- dode tijd, 11, 115, 161
- doorslingering, 172
- driehoeksmatrixvorm, 253, 254

- Eenheidsimpulsresponsie, zie impulsresponsie
- eerste kanonieke matrixvorm, 251
- eerste orde houdschakeling, 62 e.v.
- eigenschappen en theorema's m.b.t. de z -transformatie, 83 e.v., 100 e.v., 287 e.v.
- eindwaarde theorema, 87, 290
- exponential smoothing filter, 220
- extrapolatie filter, 226 e.v.

- Filters, zie digitaal-, exponential smoothing-, extrapolatie-, finite memory-, moving average-, storings- en transversale filters
- finite memory filter, 225
- flying capacitor, 34
- frekwentieresponsie van een discreet systeem, zie volgend trefwoord
- frekwentiespectrum van een bemonsterd signaal, 47 e.v., 73 e.v., 129 e.v., 133 e.v., 142 e.v.

- Gecombineerde systemen, 246
- gemodificeerde z -transformatie, 95 e.v., 102 e.v.
- gevoeligheidscoëfficiënten als ontwerpcriteria, 175

- Homogene eigenschap, 83
- houdschakeling, 53 e.v., 56, zie ook nulde orde en eerste orde houdschakeling

- Identificatie, 163
- impulsresponsie, 44, 45, 69, 81, 58, 159
- indirecte digitale regeling, zie supervisie regeling
- inherente bemonstering, 8 e.v., 199
- instabiliteit, zie stabiliteit
- instelregels, 200 e.v.
- integraalkriteria, 174
- integrerend netwerk, 178
- integrerende aktie, 191, 195 e.v.
- interface apparatuur, 16, 18
- intermitterende systemen, 2
- intersampling ripple, zie verborgen oscillaties

- inverse gemodificeerde z -transformatie, 98, 99
- inverse z -transformatie, 81, 89 e.v., 287.
- Jury-stabiliteitskriterium, 125
- Kanonieke matrixvorm, 251, 252
- kanonieke programmering I, 214, 251
- kanonieke programmering II, 214, 252
- kodeschijf, 32, 141.
- compensatie netwerken, 178 e.v., 209 e.v.
- complex verschuivingstheorem, 84, 289
- komplexe konvolutie, 49, 88
- continue elementen in het bemonsteringsproces, 42 e.v.
- konvolutie-eigenschappen van de z -transformatie, 88, 291
- konvolutie-integraal, 45, 74, 144.
- kroncker-rij, 69
- kwadratisch kostencriterium, 88, 175
- kwantiseringseffecten, 203
- kwantiseringsruis, 3, 39
- Laplace transformatie van een bemonsterd signaal, 46 e.v.
- limietwaarden-theorema, 87, 290
- lineariteitstheorema's, 83
- Meantime between failure (MTBF), 36
- meervoudige bemonstering, 92 e.v., 204
- minimum fase karakter, 135
- minimum settling time, 165, 261 e.v., 271
- moving average filter, 222 e.v.
- MTBF, zie: meantime between failure multiplexer, 33, 37
- Nulde orde houdschakeling, 58 e.v., 90
- Off line regeling, 25
- on line regeling, 26
- ontwerp van discrete en digitale regelsystemen, 163 e.v.
- ontwerpkriteria voor het dynamisch gedrag, 168 e.v.
- oplossingsmatrix, 237
- overdrachtsfunctie van een discreet systeem, 104, 109 e.v., 183, 184, 245 e.v.
- overdrachtsmatrix, 245 e.v.
- overgangverschijnselen uit het polen- en nulpuntenbeeld, 145 e.v., 154 e.v.
- Parabolische extrapolatie, 227
- parallelprogrammering, 212
- parameterschattingmethoden, 163
- Parsevals theorema, 88, 292
- piektijd, 172.
- P regelaar }
 PD regelaar } 178 e.v., 192 e.v., 198
 PI regelaar } e.v., 200
 PID regelaar }
- polaire figuur, 130, 144, 145
- polen en nulpunten, 47 e.v., 141 e.v., 154 e.v., 157 e.v.
- poolbaanmethode, 150 e.v., 162
- positie algoritme, 192
- positie foutcoëfficiënt, 166
- primaire en secundaire stroken, 47, 80
- prioriteitsinterruptie, 32, 211
- process computers, 19 e.v., 24, 29, 36
- proportionele actie, 191, 195 e.v.
- pulsed data network, 184
- pulshoogte responsie, 43, 45
- Realisatieschema's, 209 e.v.
- reëel verschuivingstheorem, 83, 286
- regelaars, zie P regelaar en verder regelbaarheid, 255 e.v.
- regulateursystemen, 262, 272 e.v.
- relatieve demping, 170, 172
- ringing effect, 265
- ripple free response, 165, 259 e.v., 272 e.v., 279
- Routh criterium, 123
- r -transformatie, 120 e.v., 134
- ruis, 277, zie ook storingsfilters
- Sample theorema van Shannon, 148
- schaaleigenschap, 86, 290
- Schur-Cohn stabiliteitskriterium, 124
- serieprogrammering, 211
- signaalbemonstering in de terugkoppelweg, 112
- signaal compressor/expander, 204
- signaal-reconstructie, 37, 38, 53 e.v.
- snelheidsalgoritme, 192
- snelheidsfoutcoëfficiënt, 166
- sommatieregel, 85
- stabiliteit, 17, 30, 117 e.v., 130, 150 e.v., 167, 226
- statische foutcoëfficiënt, 165, 168
- storingsfilters, 217 e.v.
- supervisie regeling, 27, 29
- systemen met signaalbemonstering, zie intermitterende systemen
- Theorema van Cayley-Hamilton, 245
- theorema van Leverrier, 244
- time sharing, 15, 190
- toestandsbeschrijving } 229 e.v., 238 e.v.,
 toestandsvector } 250 e.v.
- toestandsterugkoppeling, 261, 280 e.v., 285
- transversale filters, 224 e.v.
- tweede kanonieke matrixvorm, 252

tijdoptimale digitale regelsystemen, 165, 260 e.v.

Verborgen oscillaties, 126 e.v., 161, 268
vermenigvuldiging met $a^{\pm n}$, 86, 289
vermenigvuldiging met $t^{\pm m}$, 86, 290
verschuivingsoperator, zie z-transformatie
volgsystemen, 262, 272 e.v.

volledig digitale regeling, 28, 29
voorwaartse differentie, 66

Waarneembaarheid, 257 e.v.
 w -transformatie, 120 e.v., 134

Ziegler-Nichols instelregels, 201 e.v.
z-transformatie, 43, 77 e.v., 89 e.v., 102

